

赤潮生态动力学与预测

CHICHAOSHENGTAIDONGLIXUEYUYUCE

王洪礼　冯剑丰　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS


赤 潮 生 态 动 力 学 与 预 测
CHICHAOSHENGTAIDONGLIXUEYUYUCE

赤潮生态动力学与预测

王洪礼　冯剑丰　　　　　主　编
吴金克　黄东卫　李胜朋　副主编



内容简介

本书首先阐述了赤潮的成因、分类与分布及国内外的研究现状，然后深入浅出地介绍了进行赤潮非线性预测的相关理论方法，包括现代非线性动力学分岔与混沌理论、非线性随机动力学理论及相关的数值计算方法，并以渤海赤潮为例具体研究了赤潮的非线性动力学行为。本书还介绍了各种人工神经网络法、统计回归法、极值理论以及支持向量机理论在赤潮预测中的应用，并在此基础上提出了赤潮预测预警系统的构建和赤潮的防治对策。

本书可供从事赤潮和海洋生态与环境以及环境力学研究的科技工作者、高等院校师生和有关管理人员参考，同时也为我国赤潮的预测、防治与管理提供了科学依据。

图书在版编目(CIP)数据

赤潮生态动力学与预测/王洪礼，冯剑丰主编．—天津：天津大学出版社，2006.4

ISBN 7-5618-2275-8

Ⅰ.赤... Ⅱ.①王... ②冯... Ⅲ.①红潮－生态学：动力学－研究 ②红潮－预测－研究 Ⅳ.X55

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 023475 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨欢
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编：300072)
电　　话　发行部：022-27403647　邮购部：022-27402742
网　　址　www.tjup.com
短信网址　发送“天大”至 916088
印　　刷　昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　185mm×260mm
印　　张　18
字　　数　450 千
版　　次　2006 年 4 月第 1 版
印　　次　2006 年 4 月第 1 次
印　　数　1－1 500
定　　价　29.00 元



王洪礼教授

1945年出生，女，满族，河北沧州市人。1967年毕业于清华大学工程力学系，1982年天津大学研究生毕业。现任天津大学力学系教授、博士生导师，教育部科学技术委员会数理学部委员，享受国务院政府特殊津贴专家。兼任天津市振动工程学会理事长、中国振动工程学会理事、中国仪器仪表学会气象水文海洋仪器分会理事。

多年来一直从事非线性振动理论与应用、海洋环境力学和赤潮预测预警方面的研究。作为项目负责人，已完成和正承担的省部级科研项目共计20余项，其中国家自然科学基金项目有8项。已获10多项省部级科技进步奖和自然科学奖，在国内外刊物上发表文章150余篇。

组稿编辑　田　达
责任编辑　周小明
装帧设计　谷英卉
技术设计　郭　婷



前　言

赤潮是指在一定的环境条件下，海水中某些浮游生物由于暴发性增殖或高度聚集而引起的海水变色的一种生态异常现象。近年来，一方面随着现代化工农业生产的迅猛发展，沿海地区人口的增多，大量工农业废水和生活污水排入海洋，近海和港湾富营养化程度日趋严重；另一方面，沿海开发程度的提高和海水养殖业的扩大，也带来了海洋生态与环境及养殖业自身的污染问题；此外，海洋运输业的发展也导致外来有害的赤潮藻类的引入。与此同时，全球气候的变暖也导致了我国今年赤潮的频繁发生。

我国赤潮灾害发生的主要海域为东海、南海、渤海和黄海。赤潮发生的频率越来越高，规模越来越大。2003 年全国就发生了 119 次赤潮，发生面积为 14 550 km^2；2004 年全国发生赤潮 96 次，数量有所减少，但发生面积却达到了 26 630 km^2，比 2003 年增加 83%。赤潮造成的经济损失巨大，如 1998 年的赤潮严重地破坏了海洋养殖业和渔业资源，恶化了海洋环境，损害了海洋旅游业，给海洋经济的可持续发展带来严重影响。而且有毒赤潮的发生对人类健康也构成了极大的威胁。

为了减少赤潮灾害对我国海洋经济、海洋环境、海洋生态和人民生命财产造成的影响，我国各级科技部门的领导和有关专家近十年来加快开展了这方面的研究：如 1994 年国家自然科学基金"七五"重大项目"中国东南沿海赤潮发生机理研究"结题验收，并于 2003 年出版了专著《中国沿海赤潮》；再如 2003 年"十五"国家科技攻关计划重点项目中的"赤潮灾害预报技术研究"课题完成，并出版了《赤潮灾害预报机理与技术》文集。总之，有关赤潮的研究和专著还很多，内容也在不断深入。本书同样是在 2001 年以来教育部科学技术研究重点项目和天津市社会发展项目"渤海赤潮非线性预测预警系统研究"以及国家自然科学基金资助项目"海洋赤潮生态动力学系统的分岔、混沌与预测研究"的研究成果的基础上完成的。

本书为了更深入地研究赤潮问题，主要采用非线性动力学理论、人工智能和数理统计中当今比较先进的方法进行赤潮的预测；在非线性动力学理论中，除了用到确定系统的分岔、混沌理论，还针对赤潮发生的特点采用了不确定系统的非线性随机动力学理论；在人工智能方法中除了用一般的人工神经网络方法外，还针对我国赤潮数据小样本的问题用了"支持向量机"法；在数理统计方法中，除了用非参数回归法外，还用回归树法进行了预测。此外，对赤潮发生的频率还用"极值理论"进行了分析。书后还介绍了赤潮预测预警系统与赤潮的综合治理。

本书仅是我们的阶段性研究成果，受水平和时间所限，错误与不当之处在所难免，恳请同行专家和读者给予批评指正。

王洪礼

2005 年 11 月 15 日于天津大学

目 录

第 1 章　赤潮概述

赤潮是指在一定的环境条件下,海水中某些浮游生物由于暴发性增殖或高度聚集而引起海水变色的一种生态异常现象(图 1-1)。世界上多数学者对赤潮的定义是"有害藻类的水华(Harmful Algal Blooms,HABs)"。赤潮是一个历史沿用名,它并不一定都是红色,实际上是许多种藻类暴发现象的统称。赤潮由于发生的原因、种类和数量的不同,水体会呈现不同的颜色,有红色或砖红色、绿色、黄色、棕色等。值得指出的是,某些赤潮生物(如膝沟藻、裸甲藻、梨甲藻等)引起的赤潮有时并不引起海水呈现任何特别的颜色。



图 1-1　赤潮

赤潮是一种自然现象。人类早就有相关记载,据载,中国早在 2000 多年前就发生过赤潮现象。一些古书文献或文艺作品里已有一些有关赤潮方面的记载,如清代蒲松龄在《聊斋志异》中就形象地记载了与赤潮有关的发光现象。国外如《旧约·出埃及记》中就有关于赤潮的描述:"河里的水,都变作血,河也腥臭了,埃及人就不能喝这里的水了"。在日本,早在腾原时代和镰时代就有赤潮方面的记载。1803 年法国人马克·莱斯卡波特记载了美洲罗亚尔湾地区的印第安人,根据月黑之夜观察海水发光现象来判别贻贝是否可以食用。1831—1836 年,达尔文在《贝格尔航海记录》中也记载了在巴西和智利近海面发生的束毛藻引发的赤潮事件。

随着现代化工农业生产的迅猛发展,沿海地区人口的增多,大量工农业废水和生活污水排入海洋,其中相当一部分未经处理就直接排入海洋,因此导致近海和港湾地区富营养化程度日趋严重。同时,沿海开发程度的提高和海水养殖业的扩大,也带来了海洋生态环境和养殖业自身污染的问题。另一方面,海运业的发展导致外来有害赤潮种类的引入。此外,全球气候的变暖也导致了赤潮的频繁发生。

1.1　赤潮的成因

1.1.1　环境因素

赤潮是一种复杂的生态异常现象,发生的原因也比较复杂。关于赤潮发生的机理至今尚无定论。在正常的理化环境条件下,赤潮生物在浮游生物中所占的比重并不大,有些鞭毛虫类(或者甲藻类)还是一些鱼虾的食物,但是由于特殊的环境条件使某些赤潮生物过量繁殖,便形成赤潮。大多数学者认为,赤潮发生与下列环境因素密切相关。

第一,海水的富营养化是赤潮发生的物质基础和首要条件。由于城市工业废水和生活污水大量排放入海,使营养物质在水体中富集,便造成海域富营养化。此时,水域中的氮、磷等营

养盐类，铁、锰等微量元素以及有机化合物的含量大大增加，从而促使赤潮生物的大量繁殖。赤潮检测的结果表明，赤潮发生海域的水体均已遭到严重污染，氮、磷等营养盐物质大大超标。研究表明，工业废水中含有的某些金属可以刺激赤潮生物的增殖。在海水中加入小于 3 mg/dm^3 的铁螯合剂和小于 2 mg/dm^{3}的锰螯合剂，可使赤潮生物卵甲藻和真甲藻达到最高增殖率；相反，在没有铁、锰元素的海水中，即使在最适合的温度、盐度、pH 值和基本的营养条件下，种群的密度也不会增加。其次，一些有机物质也会促使赤潮生物的急剧增殖。如用无机营养盐培养简单裸甲藻，生长不明显，但加入酵母提取液时，则生长显著，加入土壤浸出液和维生素 B_{12}时，光亮裸甲藻生长特别好。

第二，水文气象和海水理化因子的变化是赤潮发生的重要原因。海水的温度是赤潮发生的重要环境因子，20 ~ 30 ℃是赤潮发生的适宜温度范围。科学家发现一周内海水温度突然升高 2 ℃以上则是赤潮发生的先兆。海水的化学因子(如盐度变化)也是促使生物因子——赤潮生物大量繁殖的原因之一。盐度在 26 ~ 37 范围内均有发生赤潮的可能，但是海水盐度在 15 ~ 21.6 时，容易形成温跃层和盐跃层。温跃层和盐跃层的存在为赤潮生物的聚集提供了条件，易诱发赤潮。由于径流、涌升流、水团或海流的交汇作用，使海底层的营养盐上升到海水上层，造成海面水域高度富营养化。营养盐含量的急剧上升，便引起赤潮藻的大量繁殖。如硅藻过盛，特别是骨条硅藻的密集常常引起赤潮。这些硅藻类又为夜光藻提供了丰富的饵料，促使夜光藻急剧增殖，从而又形成粉红色的夜光藻赤潮。监测资料表明，在赤潮发生时，水域多为干旱少雨，天气闷热，水温偏高，风力较弱，或者潮流缓慢的水域环境。

第三，海水养殖的自身污染亦是诱发赤潮的因素之一。随着沿海养殖业的大发展，尤其是对虾养殖业的蓬勃发展，也产生了严重的自身污染问题。在对虾养殖中，人工投喂大量饲料和鲜活饵料。由于养殖技术的陈旧和不完善，往往造成投饵量偏大，池内残存饵料增多，严重污染了养殖水质；另一方面，由于虾池每天需要排换水，所以每天都有大量污水排入海中。这些带有大量残饵和对虾粪便的水中含有氨氮、尿素、尿酸及其他形式的含氮化合物，加快了海水的富营养化，便为赤潮生物提供了适宜的生物环境，使其增殖加快，特别是在高温、闷热、无风的条件下更易发生赤潮。由此可见，海水养殖业的自身污染也会使赤潮发生的频率增加。

1.1.2 形成过程

赤潮的形成主要经历以下 4 个阶段：赤潮藻类孢子的存在—一定的物理、化学条件下开始分裂繁殖—大量的暴发性增殖形成赤潮—形成配子、产生孢子。

第一阶段：藻类作为孢囊休眠于海底淤泥中。如果没有外力干扰(物理或自然)，孢囊将休眠数年。如果条件合适，孢囊将慢慢发育。

第二阶段：当温度及光照条件合适时，孢囊将发育成单细胞藻类。

第三阶段：如果条件继续合适，单细胞的藻类将变成营养性细胞，并以几何级数分裂。当藻类密度达到一定阈值时，就会暴发赤潮。

第四阶段：如果条件不合适，细胞就会停止分裂而形成配子，两个配子形成受精卵，受精卵又形成孢囊，沉在海底，从而完成一轮生命周期。

赤潮的形成过程如图 1-2 所示。

为了更好地阐述赤潮的成因，下面从微分方程的角度来考虑赤潮的形成机制。首先考虑方程(1-1)。

$$\frac{dN}{dt} = \mu N - mN \pm AdvDiff \quad (1\text{-}1)$$

其中，N 表示赤潮藻类的密度，μ 表示赤潮藻类的生长率，m 表示赤潮藻类的死亡率(自然死亡、捕食等)，$AdvDiff$ 表示由于对流和扩散造成的赤潮藻类密度变化。

1.**赤潮藻类的生长率 μ**

赤潮的暴发与赤潮藻的生长率 μ 密切相关。多种生物、化学、物理因子可直接或间接地影响赤潮藻类的生长率，从而影响赤潮的形成。Daniel(2001)对此作了一个较为全面的综述。

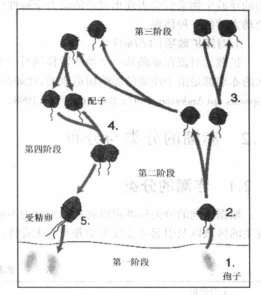


图 1-2 赤潮形成过程示意图
(http://www.whoi.edu/redtide)

人类社会污水的排放直接造成了海水的富营养化。而富营养化很有可能是造成赤潮暴发的主要原因。不同的藻类有着不同的最大生长率 μ_{max} 和半饱和系数 K_s。有些藻类具有较大的最大生长率和半饱和系数，并且 μ_{max}/K_s 较小(Smayda, 1997)。这种藻类在富营养情况下常常会获得竞争优势(Kilham, 1984)，从而更易于达到较高的密度。

还有一些物理过程可以导致局部的海水富营养化，比如上升流、风生混合流，这些物理过程可以将海底碎屑及矿物质运送到海洋表层，从而给藻类提供了充足的营养源，促进藻类生长。水柱分层也会促进某些藻类的生长，比如 Alexandrium catenella, Gymnodinium catenatum，以及 Dinophysis sp(Parel, 1988; Sellner, 1997)。这些藻类可以垂直移动，既可以在表层获得充足的阳光，也可以移动到富含营养物的海底层。

温跃层的存在可以激发藻类的生理特性，这些特性有助于生物获得竞争优势，从而诱发藻华。例如藻类的最大生长率 μ_{max} 同温度具有正相关性(Bricelj and Lonsdale, 1997)，半饱和系数 K_s 同温度具有负相关性。因此，低温和高温都可以使得相应的藻类获得竞争优势。

紊流可以减弱海洋的水柱分层，当紊流到达一定阈值时，一些藻类的生长会被抑制(Thomas et al., 1997)。因此，一些可以降低紊流的因子可以促使藻华的形成。

大陆架的锋面地带由于物理、化学状况变化较大，一些具有较高适应能力的藻类就可以获得竞争优势。

海水的营养比的变化直接改变了海洋浮游生态系统的组成和结构(Sommer, 1989)。例如，氮与磷的浓度的比值较低的时候有利于 Cyanobacteria 形成藻华(Sellner, 1997)。当海水中硅酸盐的营养比例较高时，可以促进硅藻生长。

2.**赤潮藻类的死亡率 m(自然死亡、捕食等)**

赤潮藻类的死亡主要有自然死亡和捕食两个因素。高等动物的捕食在赤潮形成过程中扮演着极为重要的角色。当高等捕食者较少时，Top-down 控制减弱，这就使得一些藻类获得竞争优势。另外，种群动力学的研究特别是非线性种群动力学的研究结果显示，食物链及食物网结

构的浮游生物系统会表现出复杂的动力学特性(Huisman J,2001),而藻华极有可能就是这种复杂动力学的一种体现。

3.对流扩散项(*AdvDiff*)

扩散与对流在赤潮从一个地区转移到另一个地区的过程中起着主导作用。世界上很多地区的赤潮都是由于洋流的影响而造成的,比如西佛罗里达海岸的 G.breve,以及瑞典海岸的 Dinophysis sp(Anderson,1997; Babaran et al.,1998; Tester and Steidinger 1997)。

1.2 赤潮的分类与分布

1.2.1 赤潮的分类

根据不同的分类标准可以将赤潮划分为不同的类别。通常采用两种分类标准:根据赤潮发生的区域以及引起赤潮发生的藻类有无毒性,具体见表 1-1。

表 1-1 赤潮的分类

划分依据	赤潮类型
发生区域	外海型 内海、海湾型 养殖区型 外来型
有无毒性	无毒性 有毒性:麻痹性贝毒(PSP)、腹泻性贝毒(DSP)、神经性贝毒(NSP)、记忆缺失性贝毒(ASP)以及西加鱼毒(CFP)

1.2.2 赤潮的分布

1.赤潮在世界范围内的分布

目前,赤潮已成为一种世界性的公害,美国、日本、中国、加拿大、法国、瑞典、挪威、菲律宾、印度、印度尼西亚、马来西亚、韩国、香港等 30 多个国家和地区赤潮发生都很频繁,具体分布如图 1-3 所示。

2.我国赤潮多发区分布

根据我国海域的分布特点和近几十年的观测和记录,我国赤潮灾害的主要发生海域如下:

①渤海海域,主要包括辽东湾中部、秦皇岛附近海域、渤海湾、莱州湾;

②黄海海域,主要包括辽宁庄河附近海域、烟台海域、胶州湾、海州湾;

③东海海域,主要包括长江口海域、舟山群岛附近海域、浙江东部沿海、厦门西港;

④南海海域,主要包括大鹏湾、大亚湾、珠江口附近海域、拓林湾以及香港的维多利亚湾等。

其中辽东湾、渤海湾、莱州湾、长江口(包括杭州湾)和珠江口为赤潮多发区。辽东湾、渤海湾和长江口赤潮发生的面积可能增加;而珠江口海域赤潮发生的面积一般不会太大,但赤潮发生频率相对要高些;由于南海水温较高,有毒藻类种类及其引发的有毒赤潮相对要多些,因此

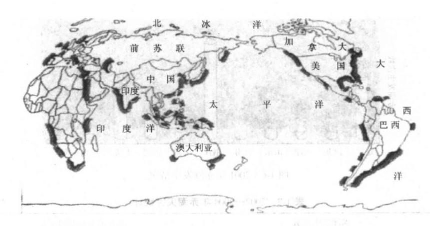


图 1-3　世界范围内赤潮发生的区域分布

造成的经济损失和人员中毒事件也会增多。

3.我国赤潮发生状况

我国各海区近50年赤潮发生次数如图1-4所示,2000年和2001年各省市赤潮发生次数如图1-5、1-6所示。2002年至2004年我国赤潮灾害统计结果如表1-2所示。

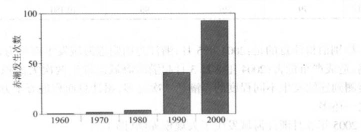


图 1-4　中国海区赤潮发生情况

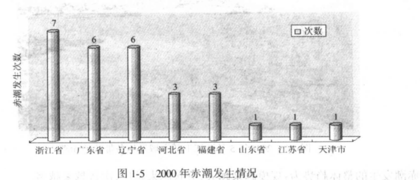


图 1-5　2000年赤潮发生情况

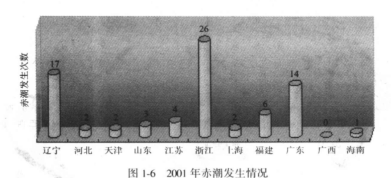


图 1-6 2001 年赤潮发生情况

表 1-2 2002—2004 年赤潮灾害统计

海区	赤潮发生次数			累计发生面积(km^2)		
	2002 年	2003 年	2004 年	2002 年	2003 年	2004 年
黄海	3	5	13	310	410	820
渤海	14	12	12	300	460	6 520
东海	51	86	53	9 000	12 990	17 880
南海	11	16	18	540	690	1 410
合计	79	119	96	10 150	14 550	26 630

特别值得注意的是:2004 年 5 月,浙江舟山附近海域发生面积为 8 000 ~ 10 000 km^2 的特大赤潮,造成严重危害;2004 年 7 月 3 日起渤海海域已发生两次大面积的赤潮,到 7 月 20 日,同期监测到连续发生不同程度的赤潮达 7 次之多,累计总面积近万平方千米,占渤海总面积的八分之一还多。

2005 年 5 月浙江海域发生了大规模赤潮(图 1-7)。



图 1-7 2005 年 5 月浙江玉环海域发生条带状的赤潮

赤潮发生的整体趋势为:规模越来越大、分布越来越广,次数越来越多。

1.3　赤潮的研究现状

国内外赤潮的研究主要包括以下5个方面。

1.3.1　赤潮藻的培养生物学和分类学研究

根据赤潮发生的记录种，进行赤潮藻类分类学的研究是赤潮研究的一个重要方向。由于人们对赤潮的研究时间较短，而且重视程度不够，所以有关赤潮生物种的研究还很不充分。因此，加强赤潮藻分类学的研究，记录赤潮发生物种，并在实验室进行培养和研究具有非常重要的理论和实际意义。暨南大学的齐雨藻和黄长江二位老师，以及国家海洋局监测中心的郭浩老师在这方面都做了大量工作，取得了较大成果。

1.3.2　赤潮藻类的生活史的研究

历史上赤潮藻类的演变也随着环境的变化而发生改变。近20年来，由于现代工业的急剧发展，海洋环境的持续恶化，引发大规模赤潮的赤潮生物种群发生了相当大的变化，也出现了许多新的生物记录种。表1-3给出了近年来中国有害赤潮藻种的变化情况。

表1-3　近年来中国有害赤潮藻种类变化情况（有毒藻及甲藻所占比例的变化）　（%）

年代	新种	甲藻	有毒藻	PSP产毒藻	DSP产毒藻	NSP产毒藻	ASP产毒藻	CFT产毒藻	其他有毒藻
1991		26.4	12.1	5	3		1		2
1997	34	52.9	24.1	5	5	1	1	4	5

1.3.3　赤潮藻类毒素的研究

赤潮的发生除了造成重大经济损失外，由于有毒赤潮藻类代谢产生的毒素也威胁着人们的身体健康。赤潮发生时，有毒赤潮藻类的毒素在鱼和其他贝类海产品的体内积累，人们误食此类海产品会引发各种病状，甚至会造成死亡。

根据目前的研究，按人们的中毒症状，藻毒素共分为麻痹性贝毒PSP、腹泻性贝毒DSP、神经性贝毒NSP、记忆缺失性贝毒ASP和西加鱼毒CFP。

对赤潮毒素的研究方向集中在主要赤潮藻类毒素的产生机理和相应的防治办法、记录新毒素种类，以及利用生物医学和遗传机制来抑制毒素的产生和扩散。

1.3.4　赤潮的发生机制研究

赤潮研究已经进行了30多年，研究手段和方法都有很大改进，也取得了许多成果，但在世界范围内赤潮发生机制方面的研究尚未取得重要突破（许卫忆等，2004）。

通常认为，赤潮的形成和发展是海洋生态系统中结构与功能处于同一生态位上的赤潮生物在营养与生存条件竞争上处于优势时，种群得以充分发展，导致整个浮游生物群落向有利于赤潮生物高度增殖的方向演替的一种极端自然现象（冯士筰等，1999）。

联合国政府间海洋委员会（Intergovernmental Oceanographic Commission，简称IOC）和海洋科

学研究委员会(Scientific Committee on Oceanic Research,简称 SCOR)提出了全球赤潮生态学与海洋学研究计划 GEOHAB(Global Ecology and Oceanography of Harmful Algal Blooms),该计划于 2001 年和 2003 年分别提出了科学规划(Science Plan)与行动计划(Implementation Plan)两份指导性文件。该计划认为赤潮的发生是海洋生态的问题,并受到海洋环境等各方面因素的影响,因此必须综合生物、化学和物理三方面因素来综合研究。这也是目前国际上对于赤潮发生机制的基本认识,同时也指导着各国开展赤潮的研究方向。

但对于赤潮的发生机制也存在着与传统理论不同的思路。许卫忆等(2004)提出赤潮的发生与海区的富营养化之间不存在直接的关系,赤潮发生的主要因素是物理聚集而非异常增殖,并以象山港的赤潮监测结果证明了该思路的正确性。

总的说来,赤潮发生的动力学机制是赤潮研究的核心问题,也是最难攻克的堡垒。

1.3.5 赤潮的预测预警研究

近年来,由于赤潮发生的频率及规模不断增加,造成了巨大的经济损失,并危害了人类的生存环境,对其进行成功预测并进行有效的预灾减灾已成为社会的迫切需要(周明江等,2001)。赤潮的预测预警研究对防治赤潮,减少赤潮所造成的经济损失,保护人们的健康安全起着重要的作用。由于近年来赤潮的危害日趋严重,各国都加强了对于赤潮预测理论及预警系统的研究。国内外学者从不同角度开展了赤潮的预测研究,并提出了众多的赤潮预测方法。概括起来主要有经验预测法、统计预测法、动力学预测法及智能预测法。

经验预测法是根据赤潮发生过程前后相关环境因子的变化规律来预测赤潮的发生。主要包括单因子指数法和综合指数法。

单因子指数法包括物理参数法(水温、透明度、水色等)、化学参数法(DO、COD、pH 值、N 、P)以及生物学参数法(叶绿素 a、藻类密度等)。

综合指数法是将相关度比较大的单因子指数综合起来形成一个综合的指数,考虑了多个因素之间的耦合作用。这些指数主要有:

营养状态指数 $E = \dfrac{COD \times DIN \times DIP}{4\,500} \times 10^6$

营养状态质量指数 $NQI = \dfrac{C_{COD}}{C'_{COD}} + \dfrac{C_{TN}}{C'_{TN}} + \dfrac{C_{TP}}{C'_{TP}}$

统计预测模型是利用多元统计的方法对赤潮发生过程前后的数据资料进行分析处理,从中得到一些规律(关系),然后根据这些规律(关系)来预测赤潮的发生。常用的方法有回归分析、主成分分析、聚类分析、因子分析等。

赤潮预测研究的一个重要方向就是动力学预测。该方法根据发生赤潮的种群的动力学机制和海洋物理环境,建立相关赤潮生消过程动力学模型,并利用各种数学工具对模型进行分析和求解,了解动力学系统中的参数特性,对模型进行模拟和仿真,并在此基础上结合监测数据进行预测。国内关于模型的研究从 20 世纪 90 年代才开始,中山大学的王寿松老师、暨南大学的黄伟建和齐雨藻老师等在这方面做了大量的工作(王寿松等,1997;黄伟建等,1996)。

最近几年,随着计算机软件技术、人工智能以及生物技术的迅猛发展,人们开始探索将其应用于赤潮预测上,主要方法有人工神经网络(ANN)与模糊逻辑(FL)。

人工神经网络是模仿人的大脑神经元结构、特性和大脑认知功能构成的信息处理系统。

它具有以下几方面的优点:容易建立模型;能够快速反应,因此适用于实时监测和预报;具有学习、联想、容错、并行处理等种种能力,尤其适用于机制尚不清楚的高维非线性系统的模拟(Lek and Guegan,1999;Whitehead et al.,1997;Recknagel et al.,1997;French et al.,1998;Karul et al.,2000;Joseph et al.,2003)。

模糊逻辑可应用于复杂系统的模拟和预测(Czogala and Leski,2000;Lin and Tsai,2001)。初期模糊逻辑主要应用于系统控制等领域(Von Altrock,1995;Lin et al.,2001),后来应用于植物动力学研究上(Foody,1996),目前已经开始应用于赤潮预测方面(Recknagel et al.,1994;Los and Vonk,1996;Shen and Chouchoulas,2001;Lau et al.,2001;Chen and Mynett,2002)。

第 2 章　非线性动力学理论基础

非线性动力学是近年来国内外基础理论研究的热点之一。本章简要介绍稳定性理论、分岔混沌理论以及非线性随机动力学理论。

2.1　稳定性理论

2.1.1　引言

稳定性问题与常微分方程的稳定性问题密切相关，本节从以下一个简单的方程来阐述一些常微分方程的概念。

$$\frac{dy}{dt} = Ay - By^2 \tag{2-1}$$

其中 A, B 为常数且 $A \cdot B > 0$，初始条件为 $y(0) = y_0$。容易求得方程的两个常数解为

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= 0 \\ y_2(t) &= \frac{A}{B} \end{aligned}\right\} \tag{2-2}$$

当 $y \neq 0$ 和 $y \neq \frac{A}{B}$ 时，方程(2-1)可改写为

$$\frac{1}{y(A - By)} dy = dt$$

两边积分可求得

$$\ln|y| - \ln|A - By| = At + C$$

这就是方程(2-1)的通解，其中 C 为任意常数。再利用初始条件可以确定 C，

$$C = \ln\left|\frac{y_0}{A - By_0}\right|$$

这样就得到满足所给初始条件的原方程解为

$$y = \frac{A}{B + \left(\frac{A}{y_0} - B\right)e^{-At}} \tag{2-3}$$

对应于初值的所有可能情况，式(2-3)的图像如图 2-1 所示。从图中可以看出，当 $A > 0, B > 0$ 时，满足初始条件 $y(0) = y_0 > 0$ 的所有解均渐近趋于解 $y_2(t) = A/B$，即该解是稳定的；而其他情况下，方程解趋向于无穷，方程解不稳定。当 $A < 0, B < 0$ 时，满足初始条件 $y(0) = y_0 < A/B$ 的所有解均渐近趋于解 $y_1(t) = 0$，即该解是稳定的；而其他情况下，方程解趋向于无穷，方程解不稳定。

2.1.2　稳定性的基本概念

1. 解的稳定性的定义

考虑下列微分方程组

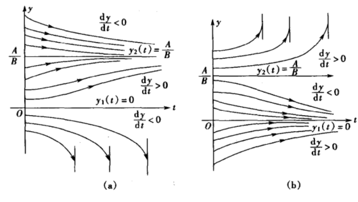


图 2-1　系统(2-1)的解

(a)$A>0,B>0$;(b)$A<0,B<0$

$$\dot{y}_i=F_i(y_1,y_2,\cdots,y_n,t)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2-4}$$

其中 y_i 是与运动有关的变量,例如位移、速度、加速度等,函数 $F_i(i=1,2,\cdots,n)$满足解的存在性和唯一性条件,其矢量微分方程形式为

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})$$

其中:$\boldsymbol{y}=[y_1\quad y_2\quad\cdots\quad y_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})=[F_1\quad F_2\quad\cdots\quad F_n]^{\mathrm{T}}$ 为 n 维列向量函数。

在以后的讨论中总假定方程组(2-4)的右端 $F_i(y_1,\cdots,y_n,t)$是在 $n+1$ 维空间的某区域 D 内,且满足解的存在唯一性定理、解的延拓与连续性定理以及可微性定理所要求的条件。

稳定性这个词最先出现在力学中,用来描述一个刚体运动的平衡状态。如果说平衡状态是稳定的,就是说刚体在受到干扰力的作用下从原来位置微微移动后,仍可回到它原来的位置。反之,如果它趋于一个新位置,这时的平衡状态就是不稳定的。

微分方程描述的是物质系统的运动规律,但从实际问题中所提出的微分方程,通常只能考虑影响该过程的主要因素,而不得不忽略一些次要因素,即干扰因素。干扰因素可以瞬时地起作用,也可以持续地起作用。从数学上来看,前者引起初值的变化,而后者则引起微分方程本身的变化。因此,研究下述问题就有着极其深远的理论意义和现实意义。这就是:初始条件或微分方程本身的微小变化是否只引起对应解的微小变化。如果由于初始条件或微分方程"差之毫厘"却使对应的解"失之千里",那么这样的定解问题显然是没有什么实用价值的。

运动系统的稳定性概念是平衡稳定性概念的直接扩大。李雅普诺夫定义的运动稳定性理论,是研究微小干扰性因素对于物质系统运动的影响。而微小的干扰因素(或者说涨落)总是存在的,且不可确定。

对于一些运动,微小干扰因素的影响并不显著,因而受干扰的运动与不受干扰的运动差别很小,这类运动称为是稳定的;对于另外一些运动,无论干扰多么小,随着时间的发展,受干扰的运动与不受干扰的运动相差很大,这类运动称为不稳定的。由于干扰总是不可避免的,所以运动稳定性的问题就有其重要的理论和实际的意义,在自然科学与工程技术领域受到了人们的普遍关注。

设式(2-4)在初始条件

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y}_0 \\ t &= t_0 \end{aligned}\right\} \tag{2-5}$$

下的解为

$$y_i = \tilde{y}_i(t) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2-6}$$

选取此式为干扰运动,考虑其稳定性。设初始条件有微扰动

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \tilde{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y}_0 \\ t &= t_0 \end{aligned}\right\} \tag{2-7}$$

其中,$\boldsymbol{\eta}$ 为 n 维扰动向量,是一阶小量。此初始条件下的微分方程(2-4)的解为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) \tag{2-8}$$

定义 2.1 如果对于任意小的正数 ε,总存在正数 $\eta(\varepsilon)$,使得对于所有受干扰的运动 $y_i = y_i(t)(i = 1,2,\cdots,n)$,当其在初始时刻 $t = t_0$ 时满足不等式

$$|y_i(t_0) - \tilde{y}_i(t_0)| \leqslant \eta(\varepsilon) \quad (i = 1,2,3,\cdots,n) \tag{2-9}$$

而在所有 $t \geqslant t_0$ 时,满足不等式

$$|y_i(t) - \tilde{y}_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1,2,3,\cdots,n) \tag{2-10}$$

则未受干扰的运动就称为对变量是稳定的。

未受干扰的运动如果不是稳定的,就称为是不稳定的。即对任意正数,至少有一种受干扰的运动,它满足不等式(2-9),但如果在某一大于 t_0 时刻不等式(2-10)不满足,那么未被扰动的运动就是不稳定的。

若未被扰动的运动不但是稳定的,而且当初始振动足够小时,随着时间的增加,所有受干扰的运动都逐渐趋近于未受干扰的运动,在这种情况下,未被扰动运动是渐近稳定的。

对于方程(2-4),研究新解 $y_i = \tilde{y}_i(t)$ 相对运动 $y_i(t)$ 的稳定性还很复杂。为此对方程(2-4)进行坐标变换

$$x_i = y_i(t) - \tilde{y}_i(t) \quad (i = 1,2,3,\cdots,n)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\tilde{y}_i(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= f_i[x_1 + \tilde{y}_1(t),\cdots,x_n + \tilde{y}_n(t),t] - f_i[\tilde{y}(t),\cdots,\tilde{y}_n(t),t] \\ &= f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,t) \end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,t) \tag{2-11}$$

由于 $f_i = 0$ 时,$y_i(t) = \tilde{y}_i(t)$,所以方程(2-4)的未扰运动稳定性问题转化为方程(2-11)的零解稳定性问题。

定义 2.2 对于任意正数,存在 $\eta(\varepsilon)$,使得对于受到干扰的运动,在初始时刻 t_0 时满足 $|x_i(t_0)| \leqslant \eta(i = 1,2,\cdots,n)$,当 $t > t_0$ 时,满足 $|x_i(t)| < \varepsilon$,则系统(2-11)在平衡位置($x_i = 0(i = 1,2,\cdots,n)$)是稳定的。反之则称未扰运动($x_i = 0(i = 1,2,\cdots,n)$)是不稳定的。

如果未扰运动($x_i = 0(i = 1,2,\cdots,n)$)是稳定的,且有 $\lim\limits_{t \to \infty} x_i(t) = 0(i = 1,2,\cdots,n)$ 成立,则称为是渐近稳定的。

设非自治系统的扰动微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(t, \boldsymbol{x}) \tag{2-12}$$

在平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的邻域 Ω：$\|\boldsymbol{x}\| < H$ 内，解存在且唯一，其中 $\|\boldsymbol{x}\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$ 为欧氏范数；邻域 Ω：$\|\boldsymbol{x}\| < H$ 表示以原点为球心、H 为半径的球。

定义 2.3　对任意 $\varepsilon > 0(\varepsilon \subset H)$，可以找到 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得当初始扰动 $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$ 时对一切 $t > t_0$ 有

$$\|\boldsymbol{x}\| < \varepsilon \tag{2-13}$$

则称系统(2-11)在平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 稳定。

定义 2.4　如果系统(2-11)在平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 稳定，且有

$$\lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{x}\| = 0$$

则称平衡位置 $\boldsymbol{x}=0$ 为渐近稳定。

定义 2.5　如果系统(2-11)在平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为渐近稳定，而 $\boldsymbol{x}_0$ 可以取任何值，则称平衡位置为全局渐近稳定。

定义 2.6　存在一个 $\varepsilon > 0(\varepsilon \subset H)$，对于任意的 $\delta(\varepsilon) > 0$，当初始扰动 $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$ 时，存在某一时刻 $t > t_0$ 有

$$\|\boldsymbol{x}\| \geqslant \varepsilon$$

称系统(2-11)在平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为不稳定。

2. 相平面上的奇点及其稳定性

定义 2.7　设系统的奇点(平衡点、临界点)为 $\boldsymbol{u}_s$，若对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得当 $\|\boldsymbol{u}(0) - \boldsymbol{u}_s\| < \delta(\varepsilon)$ 时，有 $\|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}_s\| < \varepsilon$ 对任意 $t \geqslant 0$ 成立，则称系统的奇点 $\boldsymbol{u}_s$ 是**稳定**的，否则称为**不稳定**。若奇点 $\boldsymbol{u}_s$ 是稳定的，且满足 $\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_s$，则称奇点 $\boldsymbol{u}_s$ 是**渐近稳定**的。

下面研究相平面上奇点的性质。考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{u}} = f(\boldsymbol{u}) \tag{2-14}$$

其中

$$\boldsymbol{u} = [x, y]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^2$$

如果系统的平衡点 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_s$ 不是原点(0,0)，则可作线性变换：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_s$，则式(2-14)变为 $\dot{\boldsymbol{v}} = f(\boldsymbol{v})$，此时系统的奇点已变为原点(0,0)。因此，本节着重讨论奇点为原点的振动系统。

设系统

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = f(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} f_1(u_1, u_2) \\ f_2(u_1, u_2) \end{bmatrix} \tag{2-15}$$

的平衡点为 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{0}$。显然，系统(2-15)只是系统(2-14)的一个特例。

将系统(2-15)在 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{0}$ 处泰勒展开，并忽略高次项，得

$$\dot{\boldsymbol{u}} = Df(0)\boldsymbol{u} \tag{2-16}$$

式(2-16)称为式(2-14)的线性化系统，写成向量形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{2-17}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{2-18}$$

可以证明，当矩阵 A 的所有特征值都不具有零实部时，系统(2-15)与其线性化系统(2-16)在奇点附近具有相同的性态。故着重讨论线性系统(2-17)，并假设此时矩阵 A 的所有特征值都不具有零实部。显然，此时 $\det A\neq 0$，即 A 是非奇异的，由线性代数的知识可知，此时 A 的特征值 λ_1 和 λ_2 对应的特征向量或广义特征向量(当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时) ζ_1 和 ζ_2 可以组成一个可逆(非奇异)实矩阵 $T=[\zeta_1 \quad \zeta_2]$。利用该矩阵，通过线性变换

$$u = Tv \tag{2-19}$$

其中

$$u=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, v=\begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix}, T=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

可把线性方程组(2-17)化成标准形式，其系统矩阵为下列四种形式之一：$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$，其中 λ_1、λ_2、λ、α、β 为实数。

这些标准形式是根据方程组(2-17)的特征方程

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=0$$

即

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0 \tag{2-20}$$

的根(称为特征根)的性质来确定的。

由于线性变换(2-19)不改变奇点的位置，也不会引起相平面上轨线性态的改变，从而奇点的类型也保持不变。因此，为了简单起见，下面仅就标准形式的线性方程组介绍其奇点的类型，至于一般方程组(2-17)在奇点邻域内轨线分布的面貌也同时附于相应的图中，以供比较。现按特征方程具有相异实根、重根或共轭复根，分5种情形进行讨论。

情形一 特征方程具有同号相异实根。

这时方程的标准形式为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} &= \lambda_1\zeta \\ \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} &= \lambda_2\eta \end{aligned}\right\} \tag{2-21}$$

其解为

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \eta &= B\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{aligned}\right\} \tag{2-22}$$

其中 λ_1、λ_2 为实特征根，而 A、B 为任意实常数。

首先假定 λ_1、λ_2 同为负实数，此时易见，零解是渐近稳定的。当 $B=0$ 时，ζ 的左半轴及右半轴本身为轨线；而当 $A=0$ 时，η 轴的上半轴及下半轴为轨线。若 $A\cdot B\neq 0$，则可分 $\lambda_1>\lambda_2$ 和 $\lambda_1<\lambda_2$ 两种情况。

如果 $\lambda_1>\lambda_2$，由解(2-22)有

$$\frac{\eta(t)}{\zeta(t)} = \frac{B}{A}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

故轨线切 ζ 轴于原点。相平面上轨线的形状如图 2-2(a)所示。

如果 $\lambda_1 < \lambda_2$，则有

$$\frac{\zeta(t)}{\eta(t)} = \frac{A}{B}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

这表明轨线切 η 轴于原点。相平面上轨线的形状如图 2-2(b)所示。

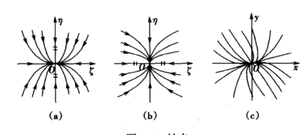


图 2-2　结点

(a)$0>\lambda_1>\lambda_2$；(b)$\lambda_1<\lambda_2<0$；(c)一般情况

从图 2-2 中可以看到，除个别轨线外，所有轨线均沿同一个方向趋向原点，其邻域内轨线具有这样性态的奇点称为**结点**。

如上所述，λ_1、λ_2 同为负实数时，方程的零解是渐近稳定的，称对应的奇点为**稳定结点**。

当 λ_1、λ_2 同为正实数时，上述讨论仍然有效，只需将 $t\to+\infty$ 改为 $t\to-\infty$，即图 2-2 中轨线的走向均须改为相反的方向，这时方程的零解为不稳定，而对应的奇点称为**不稳定结点**。

情形二　特征方程具有异号实根。

这时方程的标准形式及其解的表达式仍为式(2-21)和式(2-22)，不过其中 λ_1 和 λ_2 的符号相异。

式(2-22)中当 $B=0$ 或 $A=0$ 时，其轨线分别为 ζ 轴的左、右半轴或 η 轴的上、下半轴，且其中一轴趋于原点，另一轴远离原点。

当 $A\cdot B\neq0$ 时，如 $\lambda_1<\lambda_2$，则由式(2-22)可知，当 $t\to+\infty$ 时，$\zeta(t)\to+0$，$\eta(t)\to+\infty$，轨线图貌如图 2-3(a)所示。如 $\lambda_2<0<\lambda_1$，当 $t\to+\infty$ 时，则有 $\zeta(t)\to+\infty$，$\eta(t)\to0$，轨线形状如图 2-3(b)所示。

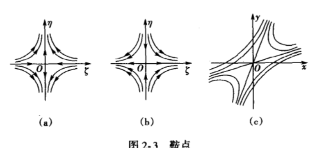


图 2-3　鞍点

(a)$\lambda_1<0<\lambda_2$；(b)$\lambda_1>0>\lambda_2$；(c)一般情况

由图 2-3 可见，在奇点邻域内，方程的轨线图貌如鞍形，这样的奇点称为**鞍点**。显然，鞍点只能是不稳定的。

情形三 特征方程具有重根。

这时可分两种情况讨论。

①当 $b \neq 0$ 或 $c \neq 0$ 时，如前面所指出的，这时方程可化为如下标准形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt} &= \lambda\zeta + \eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda\eta\end{aligned}\right\} \tag{2-23}$$

其解为

$$\left.\begin{aligned}\zeta &= (At + B)e^{\lambda t} \\ \eta &= Ae^{\lambda t}\end{aligned}\right\} \tag{2-24}$$

当 $\lambda < 0$ 时，显然有 $\zeta(t) \to 0, \eta(t) \to 0 (t \to +\infty)$，因而方程的零解是渐近稳定的。又由式(2-24)知，当 $A = 0$ 时，ζ 轴的左、右半轴本身也是轨线；而当 $A \neq 0$ 时，由于

$$\frac{\eta(t)}{\zeta(t)} = \frac{A}{At + B} \to 0 (t \to +\infty)$$

且当 $t = -\frac{B}{A}$ 时，$\zeta(t) = 0$，可知轨线越过 η 轴而切 ζ 轴于原点，如图 2-4(a)所示。所有轨线毫无例外地沿同一个方向(ζ 轴)趋于奇点，其附近轨线具有这种性态的奇点称为**退化结点**。在此情形下，奇点是稳定的，因此称为**稳定退化结点**。

若 $\lambda > 0$，这时只要将 $t \to +\infty$ 改为 $t \to -\infty$，则前面讨论仍然有效。轨线性态如图 2-4(b)所示，奇点是**不稳定退化结点**。

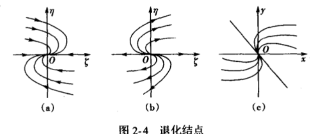


图 2-4 退化结点

(a)$\lambda < 0$;(b)$\lambda > 0$;(c)一般情况

②当 $b = c = 0$ 时，这时方程组(2-17)取形式

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda y, \quad \lambda = a = d$$

其解为

$$x(t) = Ae^{\lambda t}, y(t) = Be^{\lambda t}$$

于是

$$y = \frac{B}{A}x$$

此时，轨线是趋向(或远离)奇点的半射线，如图 2-5 所示。轨线均沿确定的方向趋于(或远离)

奇点，且不同轨线其切向也不尽相同，这样的奇点称为奇结点，且 $\lambda<0$ 时为稳定的，而 $\lambda>0$ 时为不稳定的。

(a)　(b)

图2-5　奇结点

(a) $\lambda<0$；(b) $\lambda>0$

情形四　特征方程具有非零实部复根。

这时方程的标准形式为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt}&=\alpha\zeta+\beta\eta\\ \frac{d\eta}{dt}&=-\beta\zeta+\alpha\eta\end{aligned}\right\}\tag{2-25}$$

这里 α、β 分别为特征根的实部和虚部。引入极坐标，即令 $\zeta=r\cos\theta$，$\eta=r\sin\theta$，再注意到

$$r^2=\zeta^2+\eta^2,\quad \frac{\partial r}{\partial\zeta}=\frac{\zeta}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial\eta}=\frac{\eta}{r}$$

$$\zeta\frac{d\zeta}{dt}+\eta\frac{d\eta}{dt}=r\frac{dr}{dt},\quad \zeta\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\zeta}{dt}=r^2\frac{d\theta}{dt}$$

将式(2-25)代入上式，并整理可以得到

$$\frac{dr}{dt}=\alpha r,\quad \frac{d\theta}{dt}=-\beta$$

由此得到方程(2-25)的解的极坐标形式

$$\left.\begin{aligned}r&=Ae^{\alpha t}\\ \theta&=\beta t+B\end{aligned}\right\}\tag{2-26}$$

其中 $A>0$ 和 B 为任意常数。

从式(2-26)可直接看出，轨线为一族对数螺旋线，依顺(反)时针方向盘旋地趋近或远离原点，如图2-6所示。此时，奇点称为**焦点**，且 $\alpha<0$ 时为稳定的，而 $\alpha=0$ 时为不稳定的。

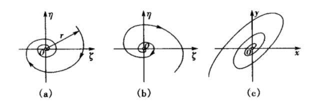


图2-6　焦点

(a) $\alpha<0,\beta>0$；(b) $\alpha>0,\beta>0$；(c)一般情况

情形五　特征方程具有纯虚根。

这相当于情形四中 $\alpha=0$ 的情形。易见这时轨线为以原点为中心的一族圆，如图2-7所示。此时，奇点称为**中心**，显然，在这种情形下零解为稳定但非渐近稳定的。

综上所述，可得下面定理。

定理2.1　如果二阶线性方程组(2-17)的系数满足条件式(2-18)，则方程的零解(奇点)将依特征方程(2-20)的根的性质而分别具有如下的不同特性。

①如果特征方程的根 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 为实根，则 $\lambda_1\lambda_2>0$ 时奇点为结点，且当 $\lambda_1<0$ 时结点是稳定的，而对应的零解为渐近稳定的，但当 $\lambda_1>0$ 时奇点和对应的零解均是不稳定的；当 $\lambda_1\lambda_2<$

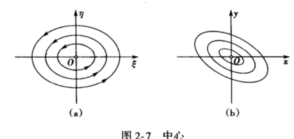


图 2-7　中心

(a)$\alpha=0,\beta<0$;(b)一般情况

0 时奇点为鞍点,零解为不稳定的。

②如果特征方程具有重根 λ,则奇点通常为退化结点,但在 $b=c=0$ 的情形奇点为奇结点。又当 $\lambda<0$ 时,这两类结点均为稳定的,而零解为渐近稳定的,但当 $\lambda>0$ 时奇点和对应的零解均为不稳定的。

③如果特征方程的根为共轭复根,即 $\lambda_1=\bar{\lambda}_2$,则当 Re $\lambda_1\neq0$ 时奇点为焦点,且当 Re $\lambda_1<0$ 时焦点是稳定的,对应的零解为渐近稳定的;而当 Re $\lambda_1>0$ 时奇点和对应的零解均为不稳定的;当 Re $\lambda_1=0$ 时奇点为中心,零解为稳定但非渐近稳定的。

上述奇点的类型和特征方程的根之间的关系还可以用图 2-8 清楚地表出。例如,设

$$p=-(a+d),q=ad-bc$$

而特征方程(2-20)写成

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

则可以利用方程的根 λ_1、λ_2 与系数 p、q 之间的关系,通过 λ_1、λ_2 为媒介,在以 p、q 为直角坐标的平面(p,q)上明确地划分出各类型奇点的分布区域,如图 2-8 所示(图中抛物线的方程为 $p^2-4q=0$)。

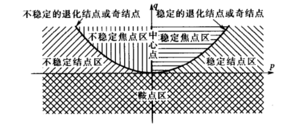


图 2-8　各类型奇点的分布区域

2.1.3　稳定性的判断准则

常系数微分方程组是最重要的一类常微分方程,其解可以通过初等函数表示。大量的工程实际问题可以近似地用线性系统理论来研究。

1. 一般理论

$$\frac{dx_i}{dt}=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2-27}$$

其矩阵形式为

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{AX} \tag{2-28}$$

其中 $\boldsymbol{X}=[x_1 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}$ 为 n 维矢量，$\boldsymbol{A}$ 为 $(a_{ij})_{n\times n}$ 矩阵，方程组解的形式可设为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{2-29}$$

$\boldsymbol{b}=[b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^{\mathrm{T}}$ 为 n 维矢量，代入式(2-28)得

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} \tag{2-30}$$

式(2-30)具有非零解的条件是 $\boldsymbol{b}$ 的系数行列式为零，即

$$D(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0 \tag{2-31}$$

$D(\lambda)$称为特征行列式，行列式展开后得相应的特征方程

$$f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n+1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{2-32}$$

λ 为特征方程的特征根。它们的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_m$，称为对应特征值的代数重数。选取非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$ 进行线性变换，则有

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$$

代入式(2-28)得

$$\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{APY}$$

即

$$\dot{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APY}=\boldsymbol{JY} \tag{2-33}$$

其中 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 与$\boldsymbol{A}$ 相似，具有相同的特征根及重数。不妨设 $\boldsymbol{J}$ 为若当型矩阵，即

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_2 & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{J}_m\end{bmatrix}$$

是对角型分块矩阵，非对角线上的元素为零，对角线上共 m 个非零子阵，每个子阵也是 $n_i\times n_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$阶的对角型分块子阵，即

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{i1} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{i2} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{J}_{i\alpha_i}\end{bmatrix} \quad (\alpha_i\leqslant n_i(i=1,2,\cdots,m))$$

其中子阵

$$\boldsymbol{J}_{iK}=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_i\end{bmatrix} \quad (K=1,2,\cdots,\alpha_i)$$

称为对应于特征根的若当块，有 $n_{i1}+n_{i2}+\cdots+n_{i\alpha_i}=n_i$，特征值 λ_i 共有 α_i 个若当块；$1\leqslant\alpha_i\leqslant n_i$，$\alpha_i$ 称几何重数。若 $\alpha_i=n_i$，即为对角阵，代数重数与几何重数相同。

2.稳定性分析

①当 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异单根时，$\boldsymbol{J}$ 为对角阵，几何重数与代数重数均为1，则解的形式为

$$y_i=C_i\mathrm{e}^{\lambda_i t} \tag{2-34}$$

此时若 λ_i 具有正实部，无论 C_i 为何值，当 $t\to\infty$ 时 $|y_i|\to\infty$，平凡解是不稳定的；若所有特征值具有负实部，无论 C_i 为何值，当 $t\to\infty$ 时 $|y_i|\to0$，平凡解是渐近稳定的。

②当 $\boldsymbol{A}$ 有重特征根时，且代数重数等于几何重数，$\boldsymbol{J}$ 仍为对角型矩阵，解的形式同式(2-34)，稳定性分析结果同上，若几何重数小于代数重数，这时方程的形式为

$$y_i=f_i(t)\mathrm{e}^{\lambda_i t} \tag{2-35}$$

式中 $f_i(t)$ 为时间 t 的多项式。多项式的次数小于几何重数。由于指数函数的增大速度大于幂函数，故在特征值实部不为零时，稳定性分析结果同上。若有零实部特征值，此时因 $f_i(t)$ 为时间 t 的多项式，故 $t\to\infty$ 时 $|y_i|$ 必有趋向于无穷的子列，所以系统平凡解(零解)不稳定。

又由于所做的变换是线性变换，所以式(2-27)和式(2-33)解的稳定性是等价的。

依据以上讨论，总结如下。

①若 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征根都具有负实部(负实根或负实部的复根)，则方程(2-27)的零解是渐近稳定的，即

$$\lim_{t\to\infty}x_i(t)=0\quad(i=1,\cdots,n)$$

②若特征根中至少有一个具有正实部(即正实根或有正实部的复根)，则方程(2-27)的零解是不稳定的。

③若没有带正实部的根，但有实部为零的单根(零根或一对纯虚根)，则系统的零解是稳定的，但非渐近稳定。

④若没有带正实部的根，但有多重零根或多重纯虚根，此时若每个重根的代数重数与几何重数相等，则零解为稳定；若至少有一个重根的几何重数小于代数重数，则系统零解为不稳定。

3.霍尔维茨判据

由于特征根实部的符号在稳定性问题中有关键性的作用，这里列出 Routh-Hurwitz 判据，或称霍尔维茨(Hurwitz)判据。它给出特征方程的根有负实部的充分必要条件。

方程(2-27)的零解的稳定性问题，可以归结为特征方程(2-32)

$$f(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0\quad(a_0=1)$$

的根的性质的研究。

$$\Delta_1=a_1,\Delta_2=\begin{vmatrix}a_1&1\\a_3&a_2\end{vmatrix},\Delta_3=\begin{vmatrix}a_1&1&0\\a_3&a_2&a_1\\a_5&a_4&a_3\end{vmatrix},\cdots,$$

$$\Delta_k=\begin{vmatrix}a_1&1&0&\cdots&0\\a_3&a_2&a_1&\cdots&0\\a_5&a_4&a_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{2k-1}&a_{2k-3}&a_{2k-5}&\cdots&a_k\end{vmatrix}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

特征方程(2-32)的所有根都具有负实部，其充要条件是：当 $k=1,2,\cdots,n$ 时，$\Delta_k>0$ 成立(最后

的 $\Delta_n>0$，可用条件 $a_n>0$ 代替)。　(2-36)

这个论断称为霍尔维茨判据，条件称为霍尔维茨条件。可以看出所有根具有负实部的必要条件是 $a_i>0(i=1,\cdots,n)$。若其中一个系数是 0 或负数，则不再计算行列式的值了。霍尔维茨条件有一个等价条件，为

$$\Delta_k>0,k=1,\cdots,n \Leftrightarrow a_i>0,i=1,\cdots,n \text{ 且 } \Delta_{n-3}>0,\Delta_{n-5}>0,\cdots$$

另有一个充分条件

$$\Delta_k>0,k=1,\cdots,n \Leftarrow a_i a_{i+1}\geqslant 3a_{i-1}\geqslant a_{i+2}$$

2.1.4 随机稳定性

由于非线性随机动力系统具有丰富而深刻的数学、力学及工程技术等实际应用背景，对其稳定性、分岔问题以及混沌现象的研究已日益受到科学界的高度重视。对于随机动力系统，所关注的是其平稳解的存在与否及其存在形式，这正如在研究确定系统时，人们更关注平衡点及稳态解一样，所以随机动力系统的稳定性是针对平稳解定义的。

考察随机动力系统的稳定性的一个重要方法是计算系统的 Lyapunov 指数。随机系统的平稳解几乎必然稳定的充分必要条件为最大的 Lyapunov 指数 $\lambda_{max}<0$。

设定义在 $\mathbf{R}^n$ 和 Wiener 空间$(\Omega,\mathscr{B},P)$上的非线性随机动力系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{X}}&=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X},\dot{\boldsymbol{W}}(t))\\ \boldsymbol{X}(t_0)&=\boldsymbol{X}_0\end{aligned}\right\} \tag{2-37}$$

其中 $\boldsymbol{W}(t)$为 m 维的 Wiener 向量过程，Ω 为样本空间，$\mathscr{B}$ 是完备事件域，P 为 Wiener 测度；Wiener 测度 P 对 Ω 上的标准漂移流(canonical flow of shift)$(\theta_t)_{t\in\mathbf{R}}$是不变的(平稳的)和遍历的，即 P 为 Ω 上的不变测度。

系统(2-37)的解过程 $\boldsymbol{X}(t,\omega,\boldsymbol{X}_0)$的概率分布函数和 Wiener 测度 P 共同合成了 $\phi_t(\omega,\boldsymbol{X})$的概率测度 μ，μ 在 Ω 上的边缘分布为P。测度 μ 的不变性与$\boldsymbol{X}(t,\omega,\boldsymbol{X}_0)$的平稳性完全等价。应当指出，无论随机流的定义还是 Oseledec 定理均要求随机微分系统是平稳和遍历的。其含义为要求随机系统在时间历程中和样本空间中对不同的样本点具有不变性。

式(2-37)以 $\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0$ 为初始点的解过程 $\boldsymbol{X}^0(t,\dot{\boldsymbol{X}}_0)$为平稳的，是指$(\boldsymbol{X}^0(t),\boldsymbol{W}(t))$为平稳过程。系统在平稳解 $\boldsymbol{X}(t)$处的线性化系统记为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y}(t),\dot{\boldsymbol{W}}(t))\boldsymbol{Y}(t),\quad \boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{Y}_0\in\mathbf{R}^n \tag{2-38}$$

其中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}(t),\zeta(t))=\left[\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X},\zeta)}{\partial \boldsymbol{X}}\right]_{n\times n}$ 为系统在$\boldsymbol{X}(t)$处的 Jacobi 系统矩阵。此线性化系统产生的流 $\boldsymbol{Y}(t,\omega)$与在 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 处的线性化 $\boldsymbol{T}_\varphi(t,\omega,\boldsymbol{x})$是一致的，即 $\boldsymbol{T}_\varphi(t,\omega,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Y}(t,\omega)$。

此线性化系统的最大 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda(\omega,\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\|\boldsymbol{Y}\|}{t} \tag{2-39}$$

它表示在 $\boldsymbol{x}(t)$处 $\boldsymbol{Y}$ 方向的 Lyapunov 指数。Lyapunov 指数的作用类似于矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X},\zeta)$特征值的实部，所以 $\lambda(\omega,\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})$可以作为界定线性化系统几乎必然稳定的条件。

在 Oseledec 于 1968 年提出了著名的乘法遍历定理后，人们才真正认识到了 Lyapunov 指数在研究非线性动力系统中的重要性。

计算系统(2-38)的最大 Lyapunov 指数的方法是多样的,有 Monte-Carlo 模拟等方法,而较常用的方法是利用系统的不变测度进行计算。许多学者采用了各种不同的技巧来计算,如奇异摄动法、随机平均法、特征函数法、线性变换法、多尺度法以及渐近分析法等。国外学者 Khasminsky、Arnold、Namachivaya、Pardoux、Ariaratnam,国内学者刘先斌、戎海武等在这方面都做了大量的研究工作。

根据遍历定理可知,系统应有 n 个实 Lyapunov 指数,而且系统零解几乎必然稳定的充分必要条件为最大的 Lyapunov 指数 $\lambda_{\max}<0$。同时,可由 $\lambda_{\max}=0$ 来确定随机动力系统的随机分岔点,这种确定随机分岔的准则与确定系统中的做法是一致的,已有国内外许多学者将其应用到随机动力系统的研究之中。

以下举例简述计算 Lyapunov 指数的过程。

对于二维随机非线性动力系统(Stratonovich 意义下)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)=\varepsilon f(\boldsymbol{X},t)\mathrm{d}t+\varepsilon^{\frac{1}{2}}g(\boldsymbol{X},t)\mathrm{d}\circ\boldsymbol{Y}(t) \tag{2-40}$$

其中 $\boldsymbol{X}(t)$为二维随机变量,$\boldsymbol{Y}(t)$是一个 m 维的具有零均值的平稳随机过程,且为宽带过程,$\mathrm{d}\circ\boldsymbol{Y}(t)$表示 stratonovich 意义下的微分。先作变量代换:$x_1=a\cos\theta, x_2=a\sin\theta$,将系统转化为

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}\alpha\\ \mathrm{d}\theta\end{bmatrix}=\varepsilon f\left(\begin{bmatrix}a\cos\theta\\ a\sin\theta\end{bmatrix},t\right)\mathrm{d}t+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(\begin{bmatrix}a\cos\theta\\ a\sin\theta\end{bmatrix},t\right)\mathrm{d}\circ\boldsymbol{Y}(t) \tag{2-41}$$

经过随机平均后得到的 Ito 随机微分方程(其极限扩散过程满足的方程),系统(2-41)的响应过程$\{a(t),\theta(t)\}$弱收敛于一个二维 Markov 扩散过程,并满足

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}a\\ \mathrm{d}\theta\end{bmatrix}=\varepsilon\boldsymbol{m}\left(\begin{bmatrix}a\\ \theta\end{bmatrix}\right)\mathrm{d}t+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\sigma}\left(\begin{bmatrix}a\\ \theta\end{bmatrix}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t) \tag{2-42}$$

其中 $\boldsymbol{m}\left(\begin{bmatrix}a\\ \theta\end{bmatrix}\right)$为二维向量函数,$\boldsymbol{\sigma}\left(\begin{bmatrix}a\\ \theta\end{bmatrix}\right)$为 2×2 阶矩阵,$\boldsymbol{W}(t)=\begin{bmatrix}W_1(t)\\ W_2(t)\end{bmatrix}$,其中 $W_1(t)$、$W_2(t)$为相互独立的零均值标准 Wiener 过程。

①当 $\boldsymbol{\sigma}$ 为对角阵且 $\boldsymbol{m}$ 的两个分量依次为 a、θ 的一元函数时,若$\begin{bmatrix}\bar{a}\\ \bar{\theta}\end{bmatrix}$为系统(2-42)的平稳解,则作变换 $a=\bar{a}+u$、$u=\mathrm{e}^{\rho}$,应用 Ito 微分法则,就可计算出一维过程 $a(t)$的 Lyapunov 指数,从而可以得到二维随机非线性动力系统在平稳解 $\bar{a}(x_1^2+x_2^2=\bar{a}^2)$处的稳定性。

②情况①不出现时,可以考虑其他计算二维或高维 Lyapunov 指数的算法,如 Arnold 渐近分析法、特征函数法等等。

2.2 分岔理论

分岔理论是近代非线性动力学理论的基本内容之一。本节首先介绍分岔的基本概念,然后简要介绍分岔的类型,最后介绍随机分岔理论。

2.2.1 分岔的基本概念

1.结构稳定性

在研究分岔之前,先介绍系统的结构稳定性。结构稳定性是指动力系统受到扰动后,其拓扑结构保持不变的性质。结构稳定性理论与分岔理论有着密切的关系。

定义 2.8　设 $\boldsymbol{f}$ 是微分流形 M 上的 C^k 向量场，若存在 $\varepsilon>0$，使得在 $\boldsymbol{f}$ 的某邻域 $B_\varepsilon(\boldsymbol{f})$ 中的任何 C^k 向量场 $\boldsymbol{g}$ 都与 $\boldsymbol{f}$ 拓扑等价，则称向量场 $\boldsymbol{f}$ 是 C^k **结构稳定的**；否则，称 $\boldsymbol{f}$ 为 C^k **结构不稳定的**。

记 U 上全体 C^1 向量场的集合为 $\mathfrak{X}^1(U)$，U 上全体 C^1 微分同胚的集合为 $\mathrm{Diff}^1(U)$，则有下面关于平面向量场的结构稳定性的重要定理。

定理 2.2　安德罗诺夫－庞特里雅金定理　记平面单位圆盘 $B^2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$。考虑系统

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}=P(x,y)\\ \dot{y}=Q(x,y)\\ (x,y)\in B^2\end{array}\right\}\tag{2-43}$$

设函数 P、$Q\in \boldsymbol{C}^1(B^2,\mathbf{R})$（即向量场 $(P,Q)\in\mathfrak{X}^1(B^2)$），且向量场 (P,Q) 与 B^2 的边界 ∂B^2 是无切的，则系统为结构稳定的充要条件是：

①系统有有限个平衡点和闭轨，且它们都是双曲的；

②系统不存在从鞍点到鞍点的轨线。

该定理可推广到二维可定向的紧流形 M^2（例如 $\mathbf{R}^3$ 中的球面和环面等）上的系统，此时有以下定理。

定理 2.3　皮郝图定理　设 M^2 是二维可定向的紧流形，$f\in\mathfrak{X}^1(M^2)$，则向量场为结构稳定的充要条件是：

①系统有有限个平衡点和闭轨，且它们都是双曲的；

②系统不存在从鞍点到鞍点的轨线；

③此系统的非游荡集仅由平衡点和闭轨组成。

定理 2.4　皮郝图稠密性定理　设 $\boldsymbol{M}^2$ 是二维可定向的紧流形，记 $\mathfrak{X}^1(\boldsymbol{M}^2)$ 中一切结构稳定的向量场构成的子集为 Σ，则 Σ 在 $\mathfrak{X}^1(\boldsymbol{M}^2)$ 中是开且稠密的。

皮郝图稠密性定理表明：在 $\mathfrak{X}^1(\boldsymbol{M}^2)$ 中，结构稳定系统是非常普遍的，即使是结构不稳定的系统，也可以用结构稳定的系统任意地逼近。为了进一步说明，这里引入通有性的概念。

定义 2.9　设 $\boldsymbol{V}$ 是一度量空间，S 是 $\boldsymbol{V}$ 的一个子集，如果 S 是可数个在 V 中稠密的开子集的交，则称 S 是一个**剩余集或余集。**

定义 2.10　若在 $\mathfrak{X}^1(U)$（或 $\mathrm{Diff}^1(U)$）中，满足某个性质 P 的向量场（或微分同胚）的集合是一个剩余集，则称性质 P 是**通有**的；若满足某个性质 P 的向量场（或微分同胚）的集合的补集是一个剩余集，则称性质 P 是**退化**的。

由通有的定义和皮郝图定理可知，在向量场的集合 $\mathfrak{X}^1(\boldsymbol{M}^2)$ 中，结构稳定性是通有的，而结构不稳定性是退化的。

2. 分岔的基本概念

分岔理论研究非线性常微系统由于参数的改变而引起解的不稳定性从而导致解的数目的变化行为。如果一个动力系统是结构不稳定的，则任意小的适当的扰动都会使系统的拓扑结构发生突然的质的变化，这种质的变化称为**分岔**。

下面给出分岔的数学定义。

定义 2.11　考察系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})\tag{2-44}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in U\subseteq\mathbf{R}^n$ 称为状态变量，$\boldsymbol{\mu}=[\mu_1\ \ \cdots\ \ \mu_m]^{\mathrm{T}}\in J\subseteq\mathbf{R}^m$ 称为分岔参数，则对固定的 $\boldsymbol{\mu}$，

$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})\in æ^1(U)$。当参数 $\boldsymbol{\mu}$ 连续变动时,系统的拓扑结构在 $\boldsymbol{\mu}_0\in J$ 发生突然变化,则称系统在 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_0$ 处出现分岔,并称 $\boldsymbol{\mu}_0$ 为一个**分岔值**。在参数 $\boldsymbol{\mu}$ 的空间中,由分岔值组成的集合称为**分岔集**。

为了清楚地表示分岔情况,在$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$空间中画出系统(2-44)的极限集(如平衡点、极限环等)随参数 $\boldsymbol{\mu}$ 变化的图形,称为**分岔图**。

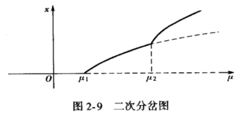


图 2-9 二次分岔图

需要指出的是,在分岔参数的变化范围内,系统可能在不同的参数值处相继出现分岔,如图 2-9 所示,系统在 $\mu=\mu_1$ 处从基本解 $x=0$ 分岔出**初级分岔解**,接着在 $\mu=\mu_2$ 处又从初级分岔解分岔出**二级分岔解**。

现在考虑 $æ^1(U)$中所有含 m 个参数的向量场组成的子集:

$$D=\{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})\mid f\in æ^1(U),\boldsymbol{\mu}\in J\subset\mathbf{R}^m\}$$

定义 2.12 设 $\boldsymbol{\mu}_0\in J$ 是$f\in D$ 的一个分岔值,若存在 $f(x,\mu)$的某个邻域 $\boldsymbol{W}\subseteq \boldsymbol{D}$,使得对于任意 $\boldsymbol{g}\in \boldsymbol{W}$ 存在一个同胚 $\boldsymbol{h}:U\times J\to U\times J,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})\to(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\mu}))$,它把向量场 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$的轨线映为向量场 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})$的轨线,并保持时间定向,则称 f 在 $\boldsymbol{\mu}_0$ 处的分岔为**通有的**;否则称 f 在 $\boldsymbol{\mu}_0$ 处的分岔为**退化的**。

下面研究平面向量场的分岔。由安德罗诺夫－庞特里雅金定理可得到下面的定理。

定理 2.5 在 $æ^1(B^2)$中出现分岔的充要条件是下面条件之一:

①存在非双曲平衡点;

②存在非双曲闭轨;

③存在同宿或异宿轨线。

最后,分岔问题的主要内容可归纳如下:

①分岔集的确定(即分岔的必要条件和充分条件的研究);

②当分岔出现时系统的拓扑结构随参数变化的情况(即分岔的定性性态的研究);

③分岔解(尤其是平衡点、极限环等)的计算;

④不同分岔的相互作用,以及它们与动力系统的其他现象(如锁相、混沌等)的关系。

2.2.2 分岔的类型

根据研究的侧重点不同,可以将分岔划分为多种类型。这里介绍主要的几种划分方法。

(1)按照系统是否显含时间 t 划分

按系统是否显含时间 t 划分,分岔可分为自治系统分岔和非自治系统分岔。目前主要的分岔理论都是针对自治系统分岔问题的,对非自治系统的分岔问题,一般是先将其化为自治系统,再进行研究。具体做法有 3 种:

①直接把时间 t 看作参数,增补一个方程 $\dot{t}=0$,则系统成为自治系统;

②对周期性的时间项,可以运用平均化方法,在一个周期内对其进行平均,从而得到新的平均后的自治方程;

③对特别简单的周期性的时间项(如 $\cos\omega t$、$\sin\omega t$),可以使用升维法,即直接增补两个系统方程 $\dot{u}=\omega v$,$\dot{v}=-\omega u$,则立即可知 $u=\sin\omega t$,用 u 替换系统方程中的 $\sin\omega t$ 后即得自治方程。

(2)按照所研究的分岔的空间域划分

按所研究的分岔的空间域划分,分岔可分为局部分岔和全局分岔。只研究在平衡点或闭轨的某个邻域内的向量场的分岔称为局部分岔,考虑向量场的全局特性的分岔称为全局分岔。一般来说,目前主要的理论分析都只集中于局部分岔,而全局分岔除了依靠数值计算外,主要依靠根据相空间里各平衡点或闭轨的局部分岔特性得出轨线的局部流向,然后进行综合,以推测出相空间全局的轨线性态。

(3)按照研究对象划分

按照研究对象划分,分岔可分为静态分岔和动态分岔。静态分岔是研究静态方程

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{0} \tag{2-45}$$

解的数目随参数 $\boldsymbol{\mu}$ 变动而发生的突然变化,其中 $\boldsymbol{f}: U\times J\subseteq \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$。

定义 2.13　设$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)\in U\times J$ 是系统(2-45)的平衡点,取点$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$的某个足够小的邻域 $\Omega\in U\times J$,记 $n(\boldsymbol{\mu})$为当 $\boldsymbol{\mu}$ 固定时系统在 Ω 内的解的数目。若当 $\boldsymbol{\mu}$ 经过 $\boldsymbol{\mu}_0$ 时,$n(\boldsymbol{\mu})$突然发生变化,则称$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$为一个**静态分岔点**,$\boldsymbol{\mu}_0$ 为一个**静态分岔值**。在静态分岔点$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$附近,系统的解$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$的集合称为 $\boldsymbol{f}$ 的**静态分岔图**或**零点集**。

上式的解对应系统的平衡点,因此静态分岔属于平衡点分岔的研究范围。根据隐函数定理,可推出静态分岔的必要条件。

定理 2.6　考察系统(2-45),设点$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$在点$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$附近,$\boldsymbol{f}$ 对 x 可微,且 $\boldsymbol{f}(x,\mu)$和 $D_x\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$对 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{\mu}$ 均连续。若$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$是 $\boldsymbol{f}$ 的静态分岔点,则 $D_x\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$是奇异的。

同时还有如下定义。

定义 2.14　若在点$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)\in U\times J$ 处有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)=\boldsymbol{0}$,且 $D_x\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$是奇异的,则称$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}_0)$为向量场 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$的一个奇异点。

这里定义的奇异点与 2.1.2 节定义的相平面上的奇点(平衡点、临界点)不同,奇异点一定是奇点,但反之不一定成立。

动态分岔是研究系统的拓扑结构发生的突然变化。解的数目的变化也属于系统拓扑结构的变化,因此动态分岔包括了静态分岔。

(4)按照系统的维数划分

按照系统的维数划分,分岔可分为一维分岔和多维分岔。一维分岔是指一维系统的分岔行为,即

$$f(x,\mu)=0 \tag{2-46}$$

其中 $f: U\times J\subseteq\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$。常见的一维分岔有 3 种:鞍结分岔、跨临界分岔和叉形分岔。多维分岔是指多维系统的分岔行为。多维系统的分岔行为十分复杂,这方面的研究一直是国内外学者的研究重点。

(5)按照系统的余维数划分

按照系统的余维数划分,分岔可分为余维 1 分岔和高余维分岔。余维 1 分岔共有 4 种,包括 3 种一维分岔(鞍结分岔、跨临界分岔和叉形分岔)和 1 种二维分岔(hopf 分岔)。余维数$\leqslant 3$的分岔类型共有 17 种。高余维(余维数大于 3)系统的分岔问题是奇异性理论研究的主要内容,也是国内外的研究重点之一。

此外,对于单参数 μ 的平面自治系统:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=P(x,y,\mu)\\ \dot{y}&=Q(x,y,\mu)\end{aligned}\right\} \tag{2-47}$$

其中$(x,y)\in\mathbf{R}^2$,已经取得了比较完整的研究结果。设μ_0是一个分岔值,其分岔类型可分为3大类。

(1)平衡点有关的分岔

设当$\mu=\mu_0$时,系统有非双曲平衡点(x_0,y_0),令$\boldsymbol{A}$为$\mu=\mu_0$时系统在(x_0,y_0)处的线性化矩阵,则:

①若$\boldsymbol{A}$有零特征值,则有高阶平衡点分岔。如图2-10(a)所示,当$\mu=\mu_0$时系统有一个鞍结点(x_0,y_0),当$\mu<\mu_0$时无平衡点,而当$\mu>\mu_0$时有一个鞍点和一个结点,这种分岔称为鞍结分岔。

②若$\boldsymbol{A}$有一对纯虚特征值,且当$\mu=\mu_0$时(x_0,y_0)是系统的细焦点,则当μ变化时,就可能从平衡点产生极限环,称为**Hopf分岔**。如图2-10(b)所示,当$\mu\leqslant\mu_0$时系统有稳定焦点(特别地,当$\mu=\mu_0$时为稳定细焦点),在它附近无闭轨;当$\mu>\mu_0$时此平衡点变为不稳定焦点,在它附近有一个极限环。当$\mu\to\mu_{0+}$时,此极限环趋于平衡点。

③若$\boldsymbol{A}$有一对纯虚特征值,且当$\mu=\mu_0$时(x_0,y_0)是系统的真中心,即在(x_0,y_0)附近全是闭轨,则当μ变化时,有可能从其中的某些闭轨分岔出极限环,而平衡点也不再是中心了。这种分岔称为庞加莱分岔。

(2)闭轨分岔

设当$\mu=\mu_0$时系统有非双曲闭轨Γ。利用周期解稳定性定理知,此时周期轨道Γ的特征指数$\oint_{\Gamma}\mathrm{div}(P,Q)\mathrm{d}t=0$,即$\Gamma$是多重环。当$\mu$变化时,系统可能出现闭轨突然产生或消失的现象,称为多重环分岔。如图2-10(c)所示,当$\mu=\mu_0$时系统有一个二重半稳定极限环;当$\mu<\mu_0$时无闭轨,而当$\mu>\mu_0$时有两个极限环。当$\mu\to\mu_{0+}$时这两个极限环趋于一个环。这种分岔称为二重半稳环分岔。

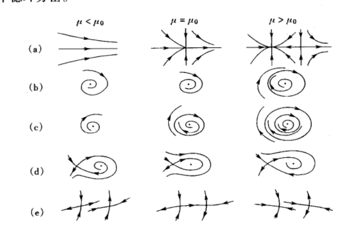


图2-10 单参数平面自治系统的分岔类型

(a)鞍结分岔;(b)Hopf分岔;(c)二重半稳环分岔;(d)同宿轨线分岔;(e)异宿轨线分岔

(3)同宿或异宿轨线分岔

设当 $\mu=\mu_0$ 时系统有同宿轨线，则当 μ 变化时，此同宿轨线可能突然消失，或从此同宿轨线中分岔出极限环，如图 2-10(d)所示。这种分岔称为同宿轨线分岔。

设当 $\mu=\mu_0$ 时系统有异宿轨线，则当 μ 变化时，此异宿轨线可能突然消失，或从几条异宿轨线相连而成的异宿环中分岔出极限环，如图 2-10(e)所示。这种分岔称为异宿轨线分岔。

上述分岔中，高阶平衡点分岔、霍普夫分岔、多重环分岔属于局部分岔，而同宿或异宿轨线分岔属于全局分岔。

需要指出，根据皮郝图定理，可以将上述结果推广到二维可定向的紧流形 M^2 上的向量场的分岔。

2.2.3　基本的一维分岔类型

下面介绍常见的 3 种一维分岔，它们都是静态分岔，也都是余维 1 分岔。这些研究结果在以后经常要用到。

考虑系统

$$f(x,\mu)=0 \tag{2-48}$$

其中 $f:U\times J\subseteq \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$。设系统的奇异点为(0,0)。将上式按泰勒级数展开，并注意到 $f(0,0)=0$ 和 $D_xf(0,0)=0$，则有

$$f(x,\mu)=a\mu+\frac{1}{2}bx^2+cx\mu+\frac{1}{2}d\mu^2+\frac{1}{6}ex^3+\cdots=0 \tag{2-49}$$

其中 $a=D_\mu f(0,0)$，$b=D_{xx}f(0,0)$，$c=D_{x\mu}f(0,0)$，$d=D_{\mu\mu}f(0,0)$，$e=D_{xxx}f(0,0)$，…；并定义 $\Delta=-\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=b^2-ac$，则随着系数 a、b、c、…、Δ 的不同，会发生不同的分岔。

1.鞍结分岔

若方程(2-49)满足非退化条件：

$$a\neq 0,\ b\neq 0 \tag{2-50}$$

则原点(0,0)为鞍结点，在该点的邻域内，方程(2-49)有解曲线

$$x=\pm\sqrt{\frac{-2a\mu}{b}} \tag{2-51}$$

则 $n(\mu)$在 $\mu=0$ 左右发生从 2 到 1 再到 0 的变化。

例 2.1　考虑系统

$$\dot{x}=f(x,\mu)=\mu-x^2 \tag{2-52}$$

的平衡解和稳定性。

解：系统的平衡方程为

$$f(x,\mu)=\mu-x^2=0$$

由此得解曲线：

$$x=\begin{cases}\pm\sqrt{\mu} & (\mu\geqslant 0)\\ \text{无解} & (\mu<0)\end{cases}$$

此外，在解曲线 $x=\pm\sqrt{\mu}$上，有

$$Df(x,\mu) = -2x = \mp 2\sqrt{\mu}, \mu \geq 0$$

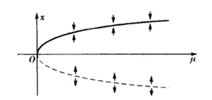


图 2-11 鞍结分岔

因此，解曲线 $x = \pm\sqrt{\mu}$ 的上半支稳定，下半支不稳定。分岔图如图 2-11 所示。

2. 跨临界分岔

若方程(2-49)满足

$$\left.\begin{array}{ll} a=0 & (\text{限定条件}) \\ b\neq 0, \Delta>0 & (\text{非退化条件}) \end{array}\right\} \tag{2-53}$$

则原点(0,0)称为跨临界分岔点。在该点的邻域内，方程(2-49)有两条相交的解曲线

$$x = \frac{-c\pm\sqrt{\Delta}}{b}\mu + O(\mu^2) \tag{2-54}$$

则 $n(\mu)$ 在 $\mu=0$ 左右发生从 2 到 1 再到 2 的变化。

例 2.2 考虑系统

$$\dot{x} = f(x,\mu) = \mu x - x^2 \tag{2-55}$$

的平衡解和稳定性。

解：系统的平衡方程为

$$f(x,\mu) = \mu x - x^2 = 0$$

由此得解曲线：$x=0$ 和 $x=\mu$。

此外，在解曲线上，有

$$Df(x,\mu) = \mu - 2x$$

对于解曲线 $x=0$，有 $Df(x,\mu) = \mu - 2x = \mu$，故当 $\mu<0$ 时平衡点渐近稳定；$\mu>0$ 时不稳定。而对于解曲线 $x=\mu$，有 $Df(x,\mu) = \mu - 2x = -\mu$，故当 $\mu>0$ 时平衡点渐近稳定；$\mu<0$ 时不稳定。分岔图如图 2-12 所示。

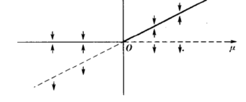


图 2-12 跨临界分岔

3. 叉形分岔

若方程(2-49)满足

$$\left.\begin{array}{ll} a=0, b=0 & (\text{限定条件}) \\ c\neq 0, e\neq 0 & (\text{非退化条件}) \end{array}\right\} \tag{2-56}$$

则原点(0,0)称为叉形分岔点。在该点的邻域内，方程(2-49)有两条相交的解曲线，即

$$x = \frac{-d}{2c}\mu + O(\mu^2) \text{和} \mu = -\frac{e}{6c}x^2 + O(x^3)$$

则 $n(\mu)$ 在 $\mu=0$ 左右发生从 1 到 3 的变化。

例 2.3 考虑系统

$$\dot{x} = f(x,\mu) = \mu x - x^3 \tag{2-57}$$

的平衡解和稳定性。

解：系统的平衡方程为

$$f(x,\mu) = \mu x - x^3 = 0$$

由此得解曲线 $x=0$ 和 $x=\pm\sqrt{\mu}$，$\mu\geqslant 0$。

此外，在解曲线上，有

$$D_x f(x,\mu)=\mu-3x^2$$

对于解曲线 $x=0$，有 $D_x f(x,\mu)=\mu-3x^2=\mu$，故当 $\mu<0$ 时平衡点渐近稳定；$\mu>0$ 时不稳定。而对于解曲线 $x=\pm\sqrt{\mu}$，$\mu\geqslant 0$，有 $D_x f(x,\mu)=\mu-3x^2=-2\mu\leqslant 0$，故稳定。分岔图如图 2-13 所示。这种叉形分岔的特点是在 $\mu>0$ 时出现非平凡解（$x=x(\mu)\neq 0$），或者说非平凡解对应的参数大于临界值 $\mu=0$，故称为超临界叉形分岔。

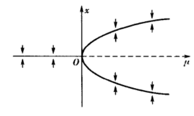


图 2-13　超临界叉形分岔

例 2.4　考虑系统

$$\dot{x}=f(x,\mu)=\mu x+x^3 \tag{2-58}$$

的平衡解和稳定性。

解：系统的平衡方程为

$$f(x,\mu)=\mu x+x^3=0$$

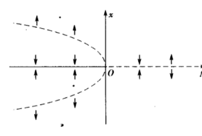


图 2-14　亚临界叉形分岔

由此得解曲线：$x=0$ 和 $x=\pm\sqrt{-\mu}$，$\mu\leqslant 0$。

此外，在解曲线上，有

$$D_x f(x,\mu)=\mu+3x^2$$

对于解曲线 $x=0$，有 $D_x f(x,\mu)=\mu+3x^2=\mu$，故当 $\mu<0$ 时平衡点渐近稳定；$\mu>0$ 时不稳定。而对于解曲线 $x=\pm\sqrt{-\mu}$，$\mu\leqslant 0$，有 $D_x f(x,\mu)=\mu+3x^2=-2\mu\geqslant 0$，故不稳定。分岔图如图 2-14 所示。这种叉形分岔的特点是在 $\mu<0$ 时出现非平凡解（$x=x(\mu)\neq 0$），或者说非平凡解对应的参数小于临界值 $\mu=0$，故称为亚临界叉形分岔。

2.2.4　Hopf 分岔

2.2.3 节研究了 3 种一维分岔，它们都是静态分岔，也都是余维 1 分岔。本节研究 Hopf 分岔。Hopf 分岔是一种非常特殊的分岔，它是 4 种余维 1 分岔里仅有的一种 2 维分岔；而且霍普夫分岔不属于静态分岔，而是动态分岔的一种。

考虑单参数系统

$$\dot{x}=f(x,\mu)$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$，$\mu\in\mathbf{R}$。设 $f(x_0,\mu)=0$，即对一切 μ，(x_0,μ) 都是平衡点，且当 $\mu=\mu_0$ 时，$D_x f(x_0,\mu_0)$ 有一对纯虚共轭特征值，而其他 $n-2$ 个特征值有非零实部，则 (x_0,μ_0) 是一个非双曲平衡点，故结构不稳定。由中心流形定理知，当 $\mu=\mu_0$ 时，系统在平衡点有二维中心流形，因此可以利用中心流形方法把 n 维系统的分岔问题化为二维系统的分岔问题去讨论。为不失一般性，取 $(x_0,\mu_0)=(0,0)$。

设经由中心流形方法化简得到的二维系统为

$$\dot{x} = f(x, \mu), x \in \mathbf{R}^2, \mu \in \mathbf{R} \tag{2-59}$$

将其泰勒展开得

$$\dot{x} = A(\mu)x + f_2(x) + f_3(x) + \text{h.o.t}^{①}, x \in \mathbf{R}^2, \mu \in \mathbf{R} \tag{2-60}$$

其中

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, Df(x, \mu) = A(\mu) = \begin{bmatrix} d\mu & -(c\mu + \omega) \\ c\mu + \omega & d\mu \end{bmatrix}, A(0) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_2(x) = \begin{bmatrix} a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 \\ b_{20}x_1^2 + b_{11}x_1x_2 + b_{02}x_2^2 \end{bmatrix}, f_3(x) = \begin{bmatrix} a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 \\ b_{30}x_1^3 + b_{21}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 \end{bmatrix}$$

c、d 分别为雅可比矩阵 $Df(x, \mu)$ 的特征值 $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ 的虚部和实部在(0,0)点的导数值，即 $c = \beta'(0)$、$d = \alpha'(0)$。

定理 2.7　Hopf 分岔定理　设系统(2-59)满足：

①$f(\mathbf{0}, \mu) = \mathbf{0}$，且(0,0)为系统的非双曲平衡点；

②$A(\mu) = Df(\mathbf{0}, \mu)$ 在 $\mu = 0$ 附近有一对复特征值 $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$。

当 $\mu = 0$ 时，$\alpha(0) = 0, \beta(0) = \beta_0 > 0$，且 $d = \alpha'(0) \neq 0$，即当 $\mu = 0$ 时 $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ 横穿虚轴，则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和一个解析函数

$$\mu(\varepsilon) = \sum_{i=2}^{\infty} \mu_i \varepsilon^i \tag{2-61}$$

当 $\mu = \mu(\varepsilon) \neq 0$(其中 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$)时，系统在原点的充分小邻域内有唯一的闭轨(即周期解)Γ_ε，该周期解的解析表达式为

$$x(s, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(\varepsilon)\varepsilon^i \tag{2-62}$$

其中 $s = \frac{2\pi}{T}t$。解的周期

$$T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\beta_0}\left(1 + \sum_{i=2}^{\infty} \tau_i \varepsilon^i\right) \tag{2-63}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\mu(\varepsilon) \to 0$，Γ_ε 趋于原点。记 μ_{j1} 为展开式(2-61)中第一个不为 0 的系数，则当 μ_{j1} 与 d 同号时，Γ_ε 是稳定极限环；当 μ_{j1} 与 d 异号时，Γ_ε 是不稳定极限环。

下面讨论在 Hopf 分岔定理的条件下系统(2-59)的分岔情况。由条件②知，当 $\mu = 0$ 时，有 $\alpha(0) = 0$ 且 $d = \alpha'(0) \neq 0$，故对充分小的 $\mu \neq 0$(即 μ 在 $\mu = 0$ 的充分小的邻域内)，有 $\alpha(\mu) \neq 0$，且 $\alpha(\mu)$ 在 $\mu = 0$ 的两侧异号。因此，当 $\mu \neq 0$ 时，原点是粗焦点(即稳定焦点或不稳定焦点)；当 $\mu = 0$ 时，原点是细焦点(即中心)。当 μ 经过 0 时，系统的稳定性发生改变，产生分岔。

还可以讨论极限环的产生条件：当 $\mu_{j1} > 0$ 时，由式(2-61)知，有 $\mu(\varepsilon) > 0$。故当 $\mu < 0$ 时不可能有 $\mu = \mu(\varepsilon)$，因此不会产生极限环。只有当 $\mu > 0$ 时才可能有 $\mu = \mu(\varepsilon)$，从而产生唯一的极限环。$\mu_{j1} < 0$ 时情况正好相反：$\mu > 0$ 时无极限环，$\mu < 0$ 时有唯一的极限环。

上述这种当分岔参数变化时系统从平衡点产生极限环的分岔现象称为 Hopf 分岔。特别

① h.o.t = high order term(高阶项)

地，满足 $d\neq0$ 和 $a_1\neq0$ 的 Hopf 分岔称为通有的。当 a_1 与 d 异号时，称为超临界 Hopf 分岔；当 a_1 与 d 同号时，称为亚临界 Hopf 分岔；若 $d=0$ 或 $a_1=0$，分别称为第一、二类退化情况。

下面研究通有的 Hopf 分岔。由 Hopf 分岔定理可知，极限环 Γ_ε 的稳定性取决于系数 μ_{j1}。对于式(2-61)和式(2-63)，可以证明，当 $j=2$ 时，有第一项系数 $\mu_2=-\dfrac{a_1}{d}$、$\tau_2=-\dfrac{b_1+\mu_2 c}{\beta_0}$。此时 $d\neq0$ 且 $a_1\neq0$，故有 $\mu_2\neq0$，由 μ_{j1} 的定义知，这时 μ_{j1} 就是 μ_2。此时 Hopf 分岔定理中关于极限环的稳定性判据可以表达如下。

推论 2.1　若系统满足定理 2.7 的条件，且有 $a_1\neq0$，则周期解式(2-62)的稳定性由其范式系数 a_1 决定：如果 $a_1<0$，周期解是稳定的；如果 $a_1>0$，周期解是发散的。

若将推论 2.1 与上述极限环产生条件结合起来，可以得到下面的结论。

推论 2.2　若系统满足定理 2.7 的条件，且有 $a_1\neq0$，则当 $a_1 d\mu<0$ 时系统产生极限环，且其稳定性与此时的平衡点 $(0,\mu)$ 的稳定性相反。

2.2.5　随机分岔

随机动力系统主要研究动力学系统在非确定性激励(包括外部激励和参数激励)作用下的响应特征。在建立数学模型(动力系统)过程中，系统所受的各种非确定因素可由随机变量或随机过程表示，系统的动力学特性可用概率密度函数或统计特征量描述。随机振动研究是在 20 世纪 50 年代初根据航空航天工程的需要而发展起来的，早期分析方法是从控制理论移植过来的。20 世纪 60 年代初非线性随机振动开始受到重视，扩散过程方法和随机微分方程方法相继被引入随机振动分析。如今随机振动理论和方法已得到很大的发展，广泛应用于航空、航天、运输、能源、建筑、环境工程、经济、管理等领域，已成为可靠性设计的重要基础。现在用于含有常参数的线性系统随机响应的频域法和时域法已经比较成熟；但对于非线性或变参数随机动力系统，求解扩散过程的转移概率密度函数仍为最常用方法，它可归结为求解相应的 FPK 方程的问题。目前只有某些特殊的一阶非线性系统才能得到 FPK 方程的精确解，对高阶稳态 FPK 方程在某些特殊的限制条件下也有精确解，此外还有一些关于 FPK 方程的近似解法和数值解法。在计算非线性随机系统和参数随机系统的精确解时常会遇到较大的困难，所以人们发展了一些近似方法，其中最有代表性的是等效线性化法、统计线性化法、等效非线性系统法、随机平均法、矩法、泛级数法等。在处理多自由度非线性系统的随机响应和可靠性问题时，等效线性化法仍是最为简单而可行的方法。这些近似方法的严格数学基础和适用范围尚待研究。

非线性随机振动系统的分析方法大致可分为以下两类：

①由确定性非线性系统振动的分析方法推广到随机振动领域，如摄动法、统计非线性化法及随机平均法等；

②将概率论、随机过程及随机微分方程运用于非线性系统的振动分析中，如 FPK 法、矩闭合法、函数级数法及随机数字模拟法等。

其中 FPK 法很早就用于研究物理学方面的问题，而用来研究随机振动问题大约有 30 年时间。它是根据随机微分方程理论以求解非线性系统的随机响应过程的概率密度函数为目标而建立起来的一种计算方法。如果当激励是一个白噪声时，响应则是一个 Markov 扩散过程，其

转移概率密度函数满足 FPK 方程。一般由系统的运动方程转换成 FPK 方程有两条路径：一是该方程的漂移及扩散系数通过对运动方程作极限运算得到；二是把运动方程按一定转换规则，代之以一组等价的 Ito 方程，而漂移与扩散系数通过与 Ito 方程的系数，作形式上的运算而得到。获得了 FPK 方程后，接下来的问题就是如何求解此方程，即找出响应过程的概率密度函数，从而求出其他的概率特征。由于 FPK 方程的复杂性，到目前为止，求解随机振动问题尚受到一些条件的约束，如激励是 Gauss 白噪声、阻尼是否为线性、激励的相关函数矩阵要与系统的阻尼矩阵成正比、系统的恢复力是有势的等。这些条件限制了这个方法的实际应用，特别是不能考虑很重要的非线性阻尼的情形。对非线性随机振动问题目前发展了许多以 FPK 方程为基础的近似解法，如迭代法、特征函数展开法、变分法等。

非线性随机振动系统的另一个重要问题是稳定性和分岔。目前有关随机稳定性的定义很多，其中比较常用的有矩稳定性、平均稳定性、随机 Lyapunov 稳定性和几乎必然稳定性等。但是在实际应用中，不同的随机稳定性有时会得到不同的结论，其合理性需要商讨。

随机分岔是指由参数的随机扰动引起系统的定性性质的变化，这是不同于确定性分岔和通常的混沌运动的一种复杂的非线性现象。目前随机分岔研究仍存在不同的思路，主要研究的是随机稳定性随扰动强度所发生的变化。Arnold.L 在随机动力系统研究的基础上，认为非线性随机系统的稳定性可由最大 Lyapunov 指数决定，并将最大 Lyapunov 指数为零作为随机分岔的标志。因此计算最大 Lyapunov 指数成为随机分岔研究的一个最主要内容，现有的计算方法较多地局限于 Khasminsky 方法，它已经成功地应用于二维系统，但对于高维系统仍有很多困难。当扰动强度较小时，还可以用随机平均法和奇异摄动法计算 Lyapunov 指数，至今随机分岔解的计算仅局限于几个简单的分岔系统。

总之，非线性随机系统的动力学研究尚待深入开展。根据理论和工程应用发展的需要，应当重点解决以下问题：非线性随机振动响应的各种实用有效解法；随机分岔研究类型和范围的扩展；随机分岔的奇异性和范式理论；随机系统的高余维退化分岔和全局分岔；随机分岔、一般混沌与随机混沌之间的区别与判据；随机参数系统的振动分析与控制等。近 20 年来，非线性随机振动已成为随机振动理论研究的重点之一。多数研究集中在非线性系统在随机外激下系统的随机响应统计量的预测，而对非线性系统在随机外激下系统响应的定性方面问题的研究较少。有学者用高斯截断法研究了一类非线性系统的随机分岔现象，用 Markov 近似理论研究了一类二维非线性系统的随机 Hopf 分岔问题。国内学者朱位秋、黄志龙、刘先斌、戎海武、徐伟等先后结合随机平均法、Markov 近似理论及 Lyapunov 指数法研究了随机 Hopf 分岔问题。

在确定性的非线性振动系统中会产生分岔及混沌运动，那么在非线性随机振动系统中是否会产生分岔和混沌运动呢？近几年来有一些学者就随机分岔与随机混沌作了研究，并取得了一些成果。但由于这类研究工作尚处于初始阶段以及问题本身的难度，使得无论在研究方法上或在运动判据上都不及确定性问题那样较为成熟和统一。

由于随机分岔问题本身的难度及其研究方法的局限性，似乎可以认为这方面的工作还处于开始阶段，许多问题值得探讨，如随机分岔的含义是什么？用什么方法来判断它的出现？它与确定性分岔现象有什么不同？在非线性动力系统中，若受有确定性激励，在某些参数控制下，将引起系统的解及其拓扑性质发生变化，即产生分岔现象。但在这样一个分岔系统中，再受到随机因素干扰时，将出现什么新的现象呢？能否像确定性问题那样明确分岔点的定义呢？

分岔系统若再次受到随机干扰（如噪声干扰，这是在实际问题中常遇到的现象），此时原来

的拓扑概念已失去了它的意义,而应用测度论、动力学量以及概率论来重新定义分岔的行为。尽管噪声动力系统不能用拓扑性质的改变来定义分岔,但一般认为,响应过程的不变测度、不变谱密度,Lyapunov 指数以及有效势等,都将随着参数的变化而发生变化,这就为引进噪声系统的分岔含义提供了可行的途径。下面将通过一些典型分岔的分析,试图对随机分岔的概念、研究的方法加以说明。

考虑由如下常微分方程描述的确定性动力学系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\alpha)\\ \boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n\end{aligned}\right\}\tag{2-64}$$

其中 α 为参数。对给定的 α,设 $\boldsymbol{x}_s(t,\alpha)$ 为系统(2-64)的稳态解,如果当 α 在 $\alpha=\alpha_c$ 附近时 $\boldsymbol{x}_s(t,\alpha)$ 的定性性质发生变化,例如当 $\alpha<\alpha_c$ 时 $\boldsymbol{x}_s(t,\alpha)$ 稳定,当 $\alpha>\alpha_c$ 时,$\boldsymbol{x}_s(t,\alpha)$ 不稳定,则称 α_c 为系统(2-64)的分岔点。至于 $\boldsymbol{x}_s(t,\alpha)$ 的稳定性,通常是将方程(2-64)在 $\boldsymbol{x}_s(t,\alpha)$ 处线性化,再根据线性化后方程的零解的稳定性来确定。

由于实际系统中不可避免地受到随机因素 $\sigma\zeta(t)$ 的干扰,考虑受随机扰动后系统(2-64)变为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\alpha,\sigma\zeta(t))\\ \boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n\end{aligned}\right\}\tag{2-65}$$

式中 $\sigma\zeta(t)$ 为一随机过程,σ 为其强度。式(2-65)中的平稳解 $\boldsymbol{x}_s(t)$ 相当于式(2-64)中的稳态解。那么如何确定随机系统(2-65)的分岔点? 同确定性系统(2-64)的分析类似,首先将系统(2-65)在平稳解 $\boldsymbol{x}_s(t)$ 处线性化,得线性化后的方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{u}} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_s(t),\zeta(t))\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{u}(0) &= \boldsymbol{u}_0\in\mathbf{R}^n\end{aligned}\right\}\tag{2-66}$$

其中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_s,\zeta)$ 是 $n\times n$ 阶雅可比矩阵。

方程(2-66)零解的稳定性可由其 Lyapunov 指数 $\lambda=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\ln\|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{u}_0)\|$ 来确定,根据 Oseledec 乘法遍历性定理,系统(2-66)的 Lyapunov 指数有 n 个实数,当且仅当其最大 Lyapunov 指数 $\lambda_{\max}<0$ 时,系统(2-66)的零解是几乎必然稳定的。这样根据最大 Lyapunov 指数 $\lambda_{\max}=0$ 确定出来的点 $\alpha=\alpha_c$ 称为系统(2-65)的随机分岔点。这种确定随机分岔点的准则与确定性系统中是一致的,并已应用于随机动力学系统的研究中,如 Arnold 等。但也有许多研究者,例如 Horsthemke 和 Lefever 等,是从系统响应的稳态概率密度的角度来给出系统(2-65)随机分岔点的定义,即如果稳态概率密度的几何形状在 $\alpha=\alpha_c$ 附近发生本质的变化,例如当 $\alpha<\alpha_c$ 时为半峰函数,当 $\alpha>\alpha_c$ 时为单峰函数,则 α_c 称为随机分岔点。

由于动力系统中有随机干扰,特别是噪声干扰的情形是比较普遍存在的现象,因此,研究随机分岔问题是具有实际意义的。从上面简单的介绍可以看出,问题尚未完全解决,值得继续研究。

2.3　混沌理论

从牛顿(Newton)力学创立时起,人们就坚信:对一个确定性动力系统施加确定性的输入,

则该系统的输出一定是确定的。这就是拉普拉斯(Laplace)的确定论思想。对于线性系统,这一结论是正确的,但对于非线性系统,则可能出现一种无法精确重复、貌似随机的运动,人们称之为混沌(chaos)。混沌理论架起了确定论和概率论两大理论体系之间的桥梁,与相对论和量子力学一起被称为20世纪物理学的三大革命。

2.3.1 混沌的定义及特征

1.混沌的定义

由于混沌系统的奇异性和复杂性至今尚未被人们彻底了解,不同领域的学者从不同角度给出了定义,因此混沌至今还没有一个统一的定义。以下给出的是几种影响较广的定义。

(1)Li-Yorke(李天岩-约克)的混沌定义

Li-Yorke定义是影响较广的混沌的数学定义之一,它是从区间映射的角度出发进行定义的。以下首先叙述Li-Yorke定理。

定理2.8 Li-Yorke定理 设$f(x)$是$[a,b]$上的连续自映射,若$f(x)$有3周期点,则对任何正整数n,$f(x)$有n周期点。

下面介绍Li-Yorke的混沌定义。

定义2.15 当满足以下条件时,$[a,b]$上的连续自映射f称为是混沌的。

①f的周期点的周期无上界。

②存在不可数子集$S\subset[a,b]$,S中无周期点,且满足:

a.对任意$x,y\in S$,有$\lim\limits_{n\to\infty}\inf|f^n(x)-f^n(y)|=0$;

b.对任意$x,y\in S,x\neq y$,有$\lim\limits_{n\to\infty}\sup|f^n(x)-f^n(y)|>0$;

c.对任意$x\in S$和f的任意周期点y,有$\lim\limits_{n\to\infty}\sup|f^n(x)-f^n(y)|>0$。

在Li-Yorke的混沌定义中,前两个极限表明子集中的点x和y相当分散又相当集中,第三个极限表明子集不会趋近于任意周期点。

根据Li-Yorke定理和Li-Yorke的混沌定义可知:对$[a,b]$上的连续自映射f,如果存在一个周期为3的周期点,就一定存在周期为任何正整数的周期点,则一定会出现混沌现象。

Li-Yorke的混沌定义刻画了混沌运动的以下3个重要特征:

①存在可数的无穷多个稳定的周期轨道;

②存在不可数的无穷多个稳定的非周期轨道;

③至少存在一个不稳定的非周期轨道。

(2)Devaney的混沌定义

Devaney的混沌定义是另一种影响较广的混沌的数学定义,它是从拓扑的角度出发进行定义的。

定义2.16 度量空间V上的映射$f:V\to V$称为是混沌的,若其满足:

①对初值的敏感依赖性,存在$\delta>0$,对任意的$\varepsilon>0$和任意的$x\in V$,在x的ε邻域I内存在y和自然数n,使得$d(f^n(x),f^n(y))>\delta$;

②拓扑传递性,对V上的任意开集X、Y,存在$k>0$,$f^k(X)\cap Y\neq\varnothing$(如一映射具有稠轨道,则它显然是拓扑传递的);

③f的周期点集在V中稠密。

Devaney 的混沌定义从另一个角度刻画了混沌运动的几个重要特征。对初值的敏感依赖性意味着无论 x 和 y 距离有多近，在 f 的多次作用下两者之间的距离 d 都会扩大到一定地步(大于 δ)，而这样的 y 在 x 任意一个小的邻域内都存在着。对这样的 f，如果用计算机计算其轨道，则任意微小的初始误差就将导致多次迭代后的计算结果与实际结果产生足够大的差异，从而导致计算失败。因此对初值的敏感依赖性也称为不可预测性。拓扑传递性意味着任一点的邻域在 f 的多次作用下将遍及度量空间 V，这说明 f 不可能分解为两个在 f 下互不影响的子系统。周期点集在 V 中稠密意味着混沌系统存在着规律性的成分，决非混乱一片，形似混乱而实则有序。

2. 混沌运动的基本特征

混沌运动是确定性非线性动力系统所特有的复杂运动状态，出现在某些耗散系统、不可积哈密顿系统和非线性离散映射系统中。通常，确定性动力系统有 3 种定常状态，即平衡态、周期运动和准周期运动。混沌运动不同于上述 3 种运动，它是一种不稳定的有限定常运动，局限于有限区域但轨道永不重复，也被描述为具有无穷大周期的周期运动。混沌运动独有的特征表现为以下几个方面。

(1)有界性

混沌是有界的，它的轨线始终局限于一个确定的区域，这个区域称为混沌吸引域。无论混沌系统内部如何不稳定，它的轨线都不会走出混沌吸引域，因此从整体上说混沌系统是稳定的。

(2)遍历性

混沌运动在其混沌吸引域内是各态历经的，即在有限时间内混沌轨道经过混沌区内每一个状态点。

(3)内随机性

确定性动力系统一般只有施加随机性的输入才能产生随机性的输出。混沌系统也是确定性动力系统，但它在施加确定性的输入后却产生类似随机的运动状态。这显然是系统内部自发产生的，故称为内随机性。这种内随机性与通常的随机性不同，它是由系统对初值的敏感性(即不可预测性)造成的，体现了混沌系统的局部不稳定性 Q。

(4)分维性

混沌系统在相空间中的运动轨线，在某个有限区域内经过无限次折叠，形成一种特殊曲线。这种曲线的维数不是整数，而是分数，故称为分维。分维性表明混沌运动具有无限层次的自相似结构，即混沌运动是有一定规律的，这是混沌运动与随机运动的重要区别之一。

(5)标度性

混沌运动是无序中的有序态。只要数值或实验设备精度足够高，总可以在小尺度的混沌域内观察到有序的运动形式。

(6)普适性

不同系统在趋于混沌时会表现出某些共同特征，不依具体的系统方程或系统参数而改变，这种性质称为普适性。普适性主要体现在混沌的几个普适常数(如 Feigenbaum 常数)上，是混沌的内在规律性的体现。

(7)统计特征

统计特征包括正的指数和连续功率谱等。

2.3.2 混沌的研究方法

混沌的研究方法可分为定性方法和定量方法两大类。

1.定性方法

定性方法包括以下4种。

(1)直接观测法

这种方法是根据动力学系统的数值运算结果,画出相空间中相轨迹随时间的变化图以及状态变量随时间的历程图。通过对比、分析和综合以确定解的分岔与混沌现象。在相空间中,周期运动对应着封闭曲线,混沌运动对应着一定区域内随机分布的永不封闭的轨迹(奇怪吸引子)。利用这种方法可以确定分岔点和普适常数。

(2)分频采样法

对周期外力作用下的非线性振子,研究其倍周期分岔和混沌现象,可采用分频采样法。该方法是实验物理学中闪烁采样法的推广。为避免复杂运动在相空间中轨迹的混乱不清,可以只限于观察隔一定时间间隔(称为采样周期)在相空间的代表点(称为采样点),这样,原来在相空间的连续轨迹就被一系列离散点所代表。分频采样法是目前辨认长周期混沌带的最有效的方法。

对于受迫振动,采样周期常取为外控力周期,当采样的结果为一点时,系统作周期运动(特殊情况下是稳定态);当采样结果是 n 个离散点时,系统运动也是周期的,运动周期是外控力周期的 n 倍;当采样结果是无穷多个离散点时,运动是随机的;若采样点集中在一定区域内并且具有层次结构,则此伪随机运动就是混沌。不断增大分辨能力,可以得到不断重复原分布形态的细微几何结构,这种无穷层次的自相似也就是标度不变性。

分频采样法适用于一切由周期外力驱动的非线性系统,具有远高于其他方法的分辨能力,而且其分辨能力将随计算机字长的扩大而进一步提高。但该方法也存在着一定的缺点,一是解释不唯一,二是不能分辨比采样频率更高的频率。

(3)庞加莱截面法

对于含多个状态变量的自治微分方程系统,可采用庞加莱截面法进行分析。其基本思想是:在多维相空间$(x_1, dx_1/dt, x_2, dx_2/dt, \cdots, x_n, dx_n/dt)$中适当选取一截面,在此截面上对某一对共轭变量如$(x_1, dx_1/dt)$取固定值,称此截面为庞加莱截面。观察运动轨迹与此截面的截点(庞加莱点),设它们依次为 $P_0, P_1, \cdots, P_n, \cdots$,则原来相空间的连续轨迹在庞加莱截面上表现为一些离散点之间的映射 $P_{n+1} = TP_n$,由此可得到系统运动特性的信息。

单变量的周期运动在相平面的轨迹是封闭曲线,二变量的周期运动在 2×2 维相空间的轨迹是二维环面……N 变量的周期运动在 $N \times N$ 维相空间的轨迹是 N 维环面。若不考虑系统初始阶段的暂态过程,只考虑庞加莱截面上的稳态图像,则当庞加莱截面上只有一个不动点或少数离散点时,运动是周期的;当庞加莱截面上是一闭曲线时,运动是准周期的;当庞加莱截面上是成片的密集点且有层次结构时,运动是混沌的。

(4)重构相空间法(赝相空间法)

当对数学模型未知的动力系统进行混沌行为分析时,上述的3种方法就不适用了,此时可采用重构相空间法。其做法如下:在实验过程中对某一个变量进行测量,得到时间序列 $\{x(k), k = 1, 2, \cdots, N\}$,再适当选取一时间延迟量 τ,τ 为采样周期的整数倍,取 $x(k), x(k +$

$\tau),x(k+2\tau),\cdots,x(k+(m-1)\tau)$为坐标轴，重新构建 m 维相空间，并利用先前测得的时间序列画出系统在这一 m 维相空间里的轨迹。这个 m 维相空间被称为重构相空间或赝相空间。

根据嵌入定理，只要重构相空间的维数（也称嵌入维数）m 与系统的真实相空间的维数 n 满足 $m\geqslant 2n+1$，就能够保证系统在重构相空间中的动力学行为与在真实相空间中的动力学行为拓扑等价。因此，重构相空间中的轨迹也可以反映系统运动状态的演化规律。对于定态，重构相空间中的轨迹是一个定点；对于周期运动，重构相空间中的轨迹是有限个点；而对于混沌运动，重构相空间中的轨迹是一些具有一定分布形式或结构的离散点。

2. 定量分析方法

定量分析方法包括以下 2 种。

(1) Lyapunov 指数分析法

与上述 4 种定性分析方法不同，Lyapunov 指数分析法是一种定量分析的方法。Liouville 定理指出：保守系统在相空间运动的过程中始终保持相体积不变。但对于一个耗散系统，其相体积一般要逐渐收缩，即 n 维相空间的轨线都要收缩到 k 维环面上。对于一个耗散系统的混沌运动，它存在着两个相反的过程：一方面耗散作用要使轨道收缩，另一方面轨道又要相互分离。收缩是由方程本身决定的（存在耗散项），它是对相空间整体来说的，其作用是使远处的轨道趋向收缩至有限的范围内（吸引子）；发散是局部性质的，是对于相空间具体点附近的性质来说的，它使已靠近的轨道相互排斥。这样，所有的轨道最终集中在相空间的有限范围内，即相互靠拢又相互排斥，经过无数次的来回折叠，形成复杂的运动形态，即成为混沌态。为了定量地刻画混沌系统相邻的两点相互分离的快慢，人们引入 Lyapunov 指数。

对一维映射 $x_{n+1}=f(x_n)$，假定初始点为 x_0，相邻点为 $x_0+\delta x_0$，经过 n 次迭代后，它们之间的距离

$$\delta x_n=|f^{(n)}(x_0+\delta x_0)-f^{(n)}(x_0)|=\frac{\mathrm{d}f^{(n)}(x_0)}{\mathrm{d}x}\delta x_0$$

当 $\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|>1$ 时，经过 n 次迭代后初始点 x_0 与相邻点 $x_0+\delta x_0$ 相互分离；当 $\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|<1$ 时，经过 n 次迭代后初始点 x_0 与相邻点 $x_0+\delta x_0$ 相互靠拢。如前所述，在混沌运动中系统的轨道既相互靠拢又相互排斥，因此混沌运动中 $\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|$ 的值在不断地变化。为了从整体上观察相邻两轨道分离或靠近的趋势，需要对迭代过程进行平均化。为此，设平均每次迭代所引起的指数分离中的指数为 σ，则原先相距为 ε 的两点经过 n 次迭代后，两点间的距离为

$$|f^{(n)}(x_0+\varepsilon)-f^{(n)}(x_0)|=\varepsilon\mathrm{e}^{n\sigma(x_0)}$$

当 $\varepsilon\to 0,n\to\infty$ 时

$$\sigma(x_0)=\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{n}\ln\left|\frac{f^{(n)}(x_0+\varepsilon)-f^{(n)}(x_0)}{\varepsilon}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\frac{\mathrm{d}f^{(n)}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

σ 称为 Lyapunov 指数，它表示在多次迭代过程中平均每次迭代所引起的相邻离散点之间以指数速度分离或靠近的趋势。

在 n 维相空间中，δx 是 n 维的，从而 δ 有 n 个值。在 $t=t_0$ 时，以 x_0 为中心，$\delta x(x_0,t_0)$ 为半径作 n 维超球面，由于各方向上的收缩或扩展的程度不同，随着时间的演化，在 t 时刻，该 n

维超球面将变形为 n 维超椭球面。此 n 维超椭球面的第 i 个坐标轴方向的半轴长在 t 时刻为 $\delta x_i(x_0,t)$，则 Lyapunov 指数 σ 的第 i 个分量 σ_i 为

$$\sigma_i(x_0)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left|\frac{\delta x_i(x_0,t)}{\delta x_i(x_0,t_0)}\right|$$

由此可见，σ 的 n 个不同分量的表示轨道沿不同的方向收缩或扩展。

对一维情况，吸引子只能是不动点，此时 $\sigma<0$。

对二维情况，吸引子为不动点或极限环。

①若吸引子为不动点，则任意方向的 δx_i 都要收缩，则这两个 Lyapunov 指数都应当是负的，因此不动点的 Lyapunov 指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)=(-,-)$。

②若吸引子为极限环，如果 δx_i 垂直于环线方向，则 δx_i 一定收缩，此时 $\sigma<0$；如果 δx_i 沿环线的切线方向，则 δx_i 不变，此时 $\sigma=0$。因此极限环的 Lyapunov 指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)=(-,0)$。

对三维情况，经过与二维情况相仿的讨论可知：

①若吸引子为不动点，则其 Lyapunov 指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(-,-,-)$；

②若吸引子为稳定极限环，则其 Lyapunov 指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(-,-,0)$；

③若吸引子为稳定二维环面，则其 Lyapunov 指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(-,0,0)$；

④若吸引子为不稳定极限环，则其 Lyapunov 指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(+,+,0)$；

⑤若吸引子为不稳定二维环面，则其 Lyapunov 指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(+,0,0)$；

⑥若吸引子为奇怪吸引子，则其 Lyapunov 指数 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(+,-,0)$。

(2)自功率谱密度分析法

根据 Fourier 分析，任何周期为 T 的周期信号 $x(t)$ 都可以展开为 Fourier 级数。其物理意义是任何周期运动可以看作是基频 $\omega_0=2\pi/T$ 和一系列泛谐振 $n\omega_0$ 的叠加，故

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega_0 t}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-in\omega_0 t}dt$$

准周期运动也可以分解为一系列频率不可约的正弦振动的叠加，二者都具有离散谱。对于任意非周期运动的信号 $x(t)$，若满足绝对可积条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$$

则可展开为 Fourier 积分

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt$$

即非周期运动信号的频率谱是连续谱。

为了表示混沌信号的频域特征，可求其自相关函数 $R_{xx}(\tau)$ 的 Fourier 变换，根据所求得的自功率谱密度函数 $S_{xx}(f)$ 来分析混沌的频域特征。

$$S_{xx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xx}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau$$

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-x}^{x}S_{xx}(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f\tau}\mathrm{d}f$$

对周期运动，功率谱只在基频及其倍频处出现尖峰，准周期对应的功率谱在几个不可约的基频以及它们叠加所在频率处出现尖峰。不同带宽的噪声的自功率谱的带宽可以展示噪声的频率宽窄的特点。发生倍周期分岔时，功率谱中将出现分频及其倍频，在这些频率点上功率谱图也都具有尖峰。混沌运动的特征在功率谱中表现为出现噪声背景宽峰的连续谱，其中含有与周期运动对应的尖峰，这表示混沌运动轨道访问各个混沌带的平均周期。根据这些特点，可以很容易地识别运动的特征是周期的还是准周期的，随机的或混沌的。

为了获得可靠的功率谱，需要对若干个相继的采样序列的谱作平均。另外，在开始采样前必须等待过渡过程消失，如果原始数据来自包含大量噪声与外部干扰的测量，还应当考虑适当的滤波或光滑化。

除了上述 6 种基本方法以外，还有其他分析混沌的方法，如分形维数分析法、测度熵法等。在实际应用的时候，常常不是单纯地使用某一种方法，而是将定性的方法与定量的方法结合起来，以获得更加精确的结果。

2.3.3　随机混沌

近年来，非线性系统的随机混沌是许多学者感兴趣的问题之一，鉴于许多问题尚未得到解决，如随机混沌运动的定义及识别办法等，故此类研究尚处于开始阶段。因为一个非线性系统在确定性激励下，只需系统具有适宜的参数则会产生混沌，如再加上随机激励，系统响应将是什么？是否仍称之为随机混沌？众所周知，在确定性问题中，Lyapunov 指数 λ_i 是可以用来判别运动形态的。随后有人把系统的指数总和称之为 Kolmogorov 熵，并以此判别运动的形态，即

$$H=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{2-67}$$

熵这个词在统计力学中使用过，它是用来测量某系统的紊乱程度的。而在信息论中，它又表示为确定某个系统的状态所需的信息量。因此它可以作为衡量某一系统状态的无知的标准，Kolmogorov 最先用其作为定义混沌的指标。

在式(2-67)中，λ_i 是 n 维系统中第 i 维 Lyapunov 指数，如果对所有的 i，$\lambda_i\leqslant 0$，则认为 $H=0$，此时系统的运动为规则振动；如周期或拟周期运动，其中 $\lambda_i=0$ 是对保守系统，而 $\lambda_i<0$ 是对耗散系统。如果只要有一个 $\lambda_i>0$，则 $H>0$。此时系统的运动为混沌过程。如果 $H=\infty$，则运动为随机过程，这样虽然非常明确地区分了三种运动的形态，但严格地讲在实际中这种单纯运动形态很少存在，往往都是兼而有之。如在一个系统中随机与混沌运动都存在，那么 H 等于多少？因此仅用一个指标来判断随机混沌运动是不够的。于是有人提出用随机敏感函数来判断一个非线性随机系统是正规的随机振动，还是混沌运动。通过计算 Duffing 非线性系统在随机激励下的响应发现，如果该系统存在极限环，则随机敏感函数的均值及方差均随时间变化而收敛于零，对其他规则吸引子则为有限值；而对具有混沌运动的非线性随机系统，则此函数的均值及方差均随时间增加而指数增加，也就是不收敛的。因此他们认为用这样一个指标来判明非线性随机系统处于混沌运动或为规则运动是可行的。

有学者提出了多峰值的概率密度函数的概念，来判别运动是否为随机混沌过程。因为一般的随机过程的概率密度函数是一个比较光滑的曲线，而当系统出现随机混沌运动时，在概率

密度函数的图形中会出现许多密集的峰值。但反之若出现多峰值的图形并不意味着系统将出现随机混沌运动，因为此时有可能在 Poincare 图中出现孤立的点，这是拟周期运动。因此多峰值图形并不是充分条件，而需要找另一种判据。

又有学者认为，Melnikov 函数法、分维数以及容量维数等方法也可以作为判别混沌出现的准则，有时可用来鉴别随机混沌。但是所提出的方法，都是通过具体数值计算而得到的，是否具有普遍意义，值得进一步探讨。由于混沌运动本身的复杂性，再加上随机干扰，使解决问题的难度更大。

2.4 非线性随机动力学理论

非线性系统在 Gauss 白噪声激励下的响应是扩散的 Markov 过程，可简称为扩散过程；系统的运动微分方程可以模型化为 Ito 或 Stratonovich 随机微分方程；系统响应 - 扩散过程的转移概率密度函数应满足相应的 FPK（Fokker-Planck-Kolmogolov）方程。由随机动力系统导出 FPK 方程的漂移和扩散系数进而求解 FPK 方程，常称为 FPK 方法。而 FPK 方程漂移和扩散系数可以通过随机平均法得到，随机平均法是应用平均法构造一个与原系统近似等效的受白噪声激励的系统，然后求解该等效系统的 FPK 方程。由于该方法的实用性较强，它已成为在随机振动与随机分岔研究中广为应用的方法之一。随机平均原理是随机平均法的严格数学基础，该原理的主要依据为 Stratonovich 和 Khasminisky 的极限定理。随机平均法中常见的有标准平均法、FPK 系数平均法及能量包线平均法等。

在研究受到噪声激励的动力系统响应的问题时，Statonovich 提出了随机平均法的思想。解决确定系统的非线性振动问题的平均法的思想已被推广到了研究非线性随机动力系统的研究中。

当随机动力系统受到白噪声激励（参数激励或外部激励）时，则可利用随机平均法推导出相应的 Ito 型或 Statonovich 型随机微分方程。随机平均法不仅适用于单自由度的随机振动问题的研究，也适用于多自由度问题的研究，其关键是要求随机激励为宽带白噪声的弱非线性的随机振动系统。

在随机微分方程的理论及应用中，有两类随机微分方程，即 Statonovich 随机微分方程与 Ito 随机微分方程，在二者之间常常需要相互转化。而对于扩散过程，满足 Ito 随机微分方程，又常常需要建立过程的转移概率密度函数所满足的 FPK 方程。这些工作的进行需要大量的推导与计算，在此扼要介绍以上理论。

2.4.1 随机平均法与随机微分方程

1. 随机平均原理

随机平均原理是随机平均法的严格数学基础，该原理的主要依据为 Stratonovich 和 Khasminisky 的极限定理。考虑如下非线性振动系统

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)=\varepsilon f(\boldsymbol{X},t)\mathrm{d}t+\varepsilon^{\frac{1}{2}}g(\boldsymbol{X},t)\mathrm{d}\circ\boldsymbol{Y}(t) \tag{2-68}$$

其中：$\boldsymbol{X}(t)$为 n 维随机变量；$\boldsymbol{Y}(t)$或者是一个 m 维具有零均值的平稳随机过程，且为宽带过程，或其相关函数 $R_{ij}(\tau)$随 τ 衰减足够快，或满足强混合条件。当 $\varepsilon\to0$ 时，在 ε^{-1}量级的时间区间上，$\boldsymbol{X}(t)$弱收敛于一个 n 维扩散 Markov 过程，并满足下列标准的 Ito 随机微分方程（其极

限扩散过程满足的方程）

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \varepsilon \boldsymbol{m}(\boldsymbol{X})\mathrm{d}t + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t) \tag{2-69}$$

其中 $\boldsymbol{W}(t)$是一个 n 维独立的标准 Wiener 向量随机过程，$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{X})$和 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X})$分别由下式确定：

$$m_i(\boldsymbol{X}) = \langle f_i(\boldsymbol{X},t) + \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial g_{ik}(\boldsymbol{X},t)}{\partial x_j} g_{jl}(\boldsymbol{X},t+\tau)R_{kl}(\tau)\mathrm{d}\tau \rangle_t$$

$$\sigma_{il}(\boldsymbol{X})\sigma_{jl}(\boldsymbol{X}) = b_{ij}(\boldsymbol{X}) = \langle \int_{-\infty}^{+\infty} g_{ik}(\boldsymbol{X},t) g_{jl}(\boldsymbol{X},t+\tau)R_{kl}(\tau)\mathrm{d}\tau \rangle_t$$

其中$\langle\cdot\rangle_t = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\langle\cdot\rangle\mathrm{d}t$ 为时间平均算子，若 $f(\boldsymbol{X},t)$、$g(\boldsymbol{X},t)$是以 T_0 为周期的周期函数时，上式中$\langle\cdot\rangle_t = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0}\langle\cdot\rangle\mathrm{d}t$，$t_0$ 是任意的。

2. 随机微分方程与 FPK 方程

FPK 方程方法应用范围是广泛的，在 20 世纪初由 Fokker 和 Planck 首先提出，并应用于研究量子物理问题。20 世纪 30 年代初 Kolmogolov 将其一般化和抽象化。此后，Andronov 等将其应用于研究一般动态系统。50 年代 Stratonovich 将其应用于研究电子工程问题。50 年代末 Chuang 与 Kazad 将其应用于研究非线性控制系统。FPK 方程所描述的是一个随机动力系统的转移概率密度函数在状态空间的演化规律。它是根据随机过程和随机微分方程理论，旨在求解某系统的随机响应过程的转移概率密度函数的求解方法。该方法使非线性随机动力系统的求解成为可能。该方法的优点在于不仅适用于弱非线性系统，也适用于强非线性系统；且既适用于平稳激励，也适用于非平稳激励。该方法的局限在于要求随机激励必须是白噪声，响应必须是 Markov 过程。

FPK 方程方法主要是把系统的位移响应看成是状态空间中的一个多维随机过程向量。当系统的激励是白噪声时，该随机过程向量在任意时刻的增量是独立的，即过程具有 Markov 性且为扩散的，其概率结构完全可由初始条件和转移概率密度函数决定。而扩散过程的概率密度函数服从 FPK 方程，所以若能够求解其 FPK 方程，则可能得到系统的转移概率密度函数，从而得到系统的统计规律。鉴于 FPK 方程的复杂性，迄今为止只有少数情况下的方程可以计算其精确解（如当系统呈现线性阻尼、激励的相关函数矩阵与系统的阻尼矩阵成比例以及系统的恢复力为有势的时候）。这就极大地限制了该方法的使用，尤其是对于常用的非线性阻尼的情况，无法得到精确解。在一维非线性情况下，在稳态情况下可以找到精确解，而对于非稳态状态只有少数情况可以找到精确解。鉴于此种状态，目前已有许多基于 FPK 方程的近似求解方法，如迭代法、特征函数展开法、变分法、数值法以及能量耗散等效法等。

在随机微分方程的理论及应用中，有两类随机微分方程，即 Statonovich 随机微分方程与 Ito 随机微分方程，在二者之间常常需要相互转化。而对于满足 Ito 随机微分方程的随机响应，可以建立过程的转移概率密度函数的 FPK 方程。这些工作的进行需要大量的推导与计算，在此将以上工作的主要内容介绍如下。

3. Ito 随机微分方程与 FPK 方程

设 $\boldsymbol{W}(t)$为 n 维矢量 Wiener 过程，各分量相互独立并具有单位强度；其增量过程具有性质：$E[\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t)] = 0$，$E[\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(t)] = \boldsymbol{I}\mathrm{d}t$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为 m 维单位矩阵。n 维随机微分方程（Ito）的形式为

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{d}\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{m}(\boldsymbol{Y},t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t)\\ \boldsymbol{Y}(t_0)=Y_0\end{array}\right\} \tag{2-70}$$

其中 $\boldsymbol{Y}=[Y_1 \quad Y_2 \quad \cdots \quad Y_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{m}=[m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_{jk}]_{n\times m}$，$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{\sigma}$ 分别称为该方程的漂移矢量和扩散矩阵，其元素皆为 $\boldsymbol{Y}$ 与 t 的连续函数。式(2-70)对应的分量形式为

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{d}Y_j(t)=m_j(\boldsymbol{Y},t)\mathrm{d}t+\sigma_{jl}(\boldsymbol{Y},t)\mathrm{d}W_l(t)\\ Y_j(t_0)=Y_{j0}\\ (j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,m)\end{array}\right\} \tag{2-71}$$

式(2-71)中重复的下标表示求和，在满足解的存在唯一性条件后，方程的唯一解 $\boldsymbol{Y}(t)$ 为 n 维扩散过程，其转移概率密度 $P(\boldsymbol{Y},t|\boldsymbol{Y}_0,t_0)$ 满足 FPK 方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial[a_j(Y,t)p]}{\partial Y_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2[b_{jk}(\boldsymbol{Y},t)p]}{\partial Y_j\partial Y_k} \quad (j,k=1,2,\cdots,n) \tag{2-72}$$

其中

$$a_j(\boldsymbol{Y},t)=m_j(\boldsymbol{Y},t)|_{\boldsymbol{Y}=y} \tag{2-73}$$

$$b_{jk}(\boldsymbol{Y},t)=[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Y},t)\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y},t)]_{jk}|_{\boldsymbol{Y}=y}=\sum_{l=1}^{m}\sigma_{jl}(\boldsymbol{Y},t)\sigma_{jk}(\boldsymbol{Y},t)|_{\boldsymbol{Y}=y} \tag{2-74}$$

式(2-72)、式(2-73)、式(2-74)表达了 FPK 方程漂移与扩散系数同 Ito 随机微分方程的漂移与扩散系数之间的关系。这说明：在得到了 Ito 随机微分方程后，通过上式可以求得其转移概率密度所满足的 FPK 方程，即由 Ito 方程到 FPK 方程是唯一的；反之，已知 FPK 方程却无法唯一确定 Ito 随机微分方程。这是由于若对式(2-72)、式(2-73)、式(2-74)中的 $\boldsymbol{\sigma}$ 换为 $\boldsymbol{\sigma T}$，$\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵，则 FPK 方程不变，而 Ito 方程的扩散矩阵为 $\boldsymbol{\sigma T}$，即同一个 FPK 方程可以对应无穷多个 Ito 方程。

4. Ito 随机微分法则

设 $\varphi(\boldsymbol{Y}(t),t)$ 为 $\boldsymbol{Y}(t)$ 与 t 的标量函数，且存在对 t 的偏导数及 $\boldsymbol{Y}(t)$ 各分量的连续二阶偏导数，$\boldsymbol{Y}(t)$ 满足 Ito 随机微分方程(2-70)，则得到如下 Ito 随机微分公式，即 $\varphi(\boldsymbol{Y}(t),t)$ 所满足的 Ito 随机微分方程

$$\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{Y},t)=\left[\boldsymbol{\varphi}_t+\boldsymbol{\varphi}_Y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varphi}_{YY}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}})\right]\mathrm{d}t+\boldsymbol{\varphi}_Y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t) \tag{2-75}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}_Y=[\varphi_{Y_1} \quad \varphi_{Y_2} \quad \cdots \quad \varphi_{Y_n}]^{\mathrm{T}}$，$\varphi_{Y_j}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial Y_j}$，$\varphi_{YY}=[\varphi_{Y_jY_k}]_{n\times n}$，$\varphi_{Y_iY_k}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial \boldsymbol{Y}_j\partial \boldsymbol{Y}_k}$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，公式(2-75)也称为 Ito 微分法则或 Ito 引理。

5. 两类随机微分方程之间的关系

在研究随机过程 $\boldsymbol{Y}(t)$ 时，若可得到其概率转移密度函数 $p(\boldsymbol{Y},t|\boldsymbol{Y}_0,t_0)$ 的表达式或是 $p(\boldsymbol{Y},t|\boldsymbol{Y}_0,t_0)$ 所满足的 FPK 方程，则对于研究工作而言是解决了一大关键问题。总之，要得到 $p(\boldsymbol{Y},t|\boldsymbol{Y}_0,t_0)$ 所满足的 FPK 方程，这就需要先建立 $\boldsymbol{Y}(t)$ 所满足的 Ito 微分方程；而通常情况下，所讨论的随机动力系统遭受的随机激励皆为物理意义下的白噪声，所建立的方程为 Stratonovich 随机微分方程。所以在解决问题时，需先将 Stratonovich 随机微分方程转化为 Ito 随机微分方程。对于 Stratonovich 随机微分方程

$$\begin{array}{l}\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_j(t)=f_j(\boldsymbol{Y},t)\mathrm{d}t+g_{jl}(\boldsymbol{Y},t)\mathrm{d}\circ \boldsymbol{W}_l(t),\ \boldsymbol{Y}_j(t_0)=Y_{j0}\\ (j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,m)\end{array} \tag{2-76}$$

转化为相应的 Ito 随机微分方程

$$dY_j(t)=\left[f_j(Y,t)+\frac{1}{2}g_{rl}(Y,t)\frac{\partial g_{jl}(Y,t)}{\partial Y_r}\right]dt+g_{jl}(Y,t)dW_l(t),Y_j(t_0)=Y_{j0}$$

$$(j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,m) \tag{2-77}$$

同样，Ito 随机微分方程(2-71)可转化为相应的 Stratonovich 随机微分方程

$$dY_j(t)=\left[m_j(Y,t)-\frac{1}{2}\sigma_{rl}(Y,t)\frac{\partial \sigma_{jl}(Y,t)}{\partial Y_r}\right]dt+\sigma_{jl}(Y,t)d\circ W_l(t),Y_j(t_0)=Y_{j0}$$

$$(j,r=1,2,\cdots,n;l,s=1,2,\cdots,m) \tag{2-78}$$

由式(2-71)到式(2-78)和由式(2-76)到式(2-77)的转换，增加的附加项称为 Wong-Zakai 修正项。式(2-71)~式(2-78)的表达式中，重复下标表示求和。

在应用 FPK 方法求解非线性随机动力系统的随机响应时，首先是将 Stratonovich 随机微分方程转化为 Ito 随机微分方程，其次是计算精确解，两方面尚存在较大的困难。近年来，Lin Y. K, Cai G.Q 等人在寻求稳态精确解方面做了大量工作，朱位秋对 FPK 方程的求解方法的进展作了全面而翔实的总结。

2.4.2 一维扩散过程的边界分析

一个扩散过程的性质很大程度上取决于扩散过程在边界的性态。尤其对于一维扩散过程，其概率渐近稳定性与其平稳概率密度的存在性可以完全由该过程在边界上的性态确定。先后有多位学者对此问题进行过系统的阐述。若有一维时齐的扩散过程 $X(t)$，满足如下 Ito 随机微分方程：

$$dX(t)=m(X)dt+\sigma(X)dW(t) \tag{2-79}$$

则 $X(t)$的边界可以由如下 4 个函数来分类：

①尺度函数，$l(x)=\int_{x_0}^{x}\psi^{-1}(u)du$；

②速度函数，$v(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\psi(u)}{b(u)}du$；

③从 x_0 到达 x 的时间，$\Sigma(x)=\int_{x_0}^{x}v(u)dl(u)$；

④从 x 到达 x_0 的时间，$N(x)=\int_{x_0}^{x}l(u)dv(u)$，

其中 $x_0\in(x_l,x_r)$为内点，x_l、x_r 分为左右边界，

$$a(x)=m(X)|_{X=x},b(x)=\sigma^2(X)|_{X=x},\psi(x)=\exp\left[\int\frac{2a(x)}{b(x)}dx\right]。$$

上述四个函数的关系如下：

①$l(x)=\infty$意味着 $\Sigma(x)=\infty$；

②$\Sigma(x)<\infty$意味着 $l(x)<\infty$；

③$v(x)=\infty$意味着 $N(x)=\infty$；

④$N(x)<\infty$意味着 $v(x)<\infty$；

⑤$\Sigma(x)+N(x)=l(x)v(x)$。

1.边界的分类

扩散过程的边界可以分为如下4类：

①规则边界，过程既可以从内部到达边界，也可以从边界进入内部；

②越出边界，过程可以从内部到达边界，但不能从边界进入内部；

③进入边界，过程可以从边界进入内部，但不能从内部到达边界；

④自然边界，过程既不能从内部到达边界，也不能从边界进入内部。

自然边界又可以分为吸引自然边界、排斥自然边界及严格自然边界。

对于边界 x_b 可用上述函数在该处的函数值根据表2-1进行分类，表中的 * 表示各类边界最少的充分条件。

表 2-1 边界分类表

判断准则				分类	
$l(x_b)$	$v(x_b)$	$\Sigma(x_b)$	$N(x_b)$		
$<\infty^*$	$<\infty^*$	$<\infty$	$<\infty$	规　则(regular)	可达到
$<\infty$	$=\infty^*$	$<\infty^*$	$=\infty$	越　出(exit)	可达到
$<\infty^*$	$=\infty^*$	$=\infty^*$	$=\infty$	吸引自然(attractively natural)	不可达到
$=\infty^*$	$<\infty^*$	$=\infty$	$=\infty^*$	排斥自然(repulsively natural)	不可达到
$=\infty^*$	$=\infty^*$	$=\infty$	$=\infty$	严格自然(strictly natural)	不可达到
$=\infty^*$	$<\infty$	$=\infty$	$<\infty^*$	进　入(entrance)	不可达到

2.奇异边界(singular boundary)

对于一维扩散过程 $X(t)$，若其样本轨道上存在某些奇点，则这些奇点会对样本的性态产生重要的影响，若奇点又为边界，则称之为奇异边界(点)。使扩散系数 $\sigma(x_s)=0$ 的点 x_s 为第一类奇点，x_s 又是边界，则为第一类奇异边界。使漂移系数 $m(x_s)$ 无界的点 x_s 为第二类奇点，x_s 又是边界，则为第二类奇异边界。

一般情况下计算奇异边界的 $l(x)$、$v(x)$、$N(x)$、$\Sigma(x)$ 等函数是很困难的，鉴于在边界分类时只需要这些积分的可积性，即漂移系数与扩散系数在边界邻域的极限性态，以下给出奇异边界的分类准则。

3.第一类奇异边界

设 $\sigma(x_s)=0$，

①若 $m(x_s)\neq 0$，则称 x_s 为流动点(shunt，$m(x_s)>0(<0)$，为右(左)流动点)；

②若 $m(x_s)=0$，则称 x_s 为套点(trap)；

③若 $x\to x_s$，$\sigma^2(x)=O(|x-x_s|^{\alpha_s})$，$\alpha_s\geqslant 0$，则称 α_s 为 x_s 的扩散指数(diffusion exponent)；

④若 $x\to x_s$，$m(x)=O(|x-x_s|^{\beta_s})$，$\beta_s\geqslant 0$，则称 β_s 为 x_s 的漂移指数(drift exponent)；

⑤若 $x\to x_l^+$ 或 $x\to x_r^-$，

$$c_l=\lim_{x\to x_l^+}\frac{2m(x)(x-x_l)^{\alpha_l-\beta_l}}{\sigma^2(x)} \tag{2-80}$$

$$c_r = -\lim_{x \to x_r^-} \frac{2m(x)(x_r - x)^{\alpha_r - \beta_r}}{\sigma^2(x)} \tag{2-81}$$

则称 c_1、c_r 为特征标值(character value)。

第一类奇异边界 x_s 的分类可由 α_s、β_s 以及 c_1、c_r 来确定,具体分类如表 2-2 所示。

表 2-2　第一类奇异边界的分类表

<table>
<tr><th>系　数</th><th colspan="4">条　　件</th><th>边界类别</th></tr>
<tr><td rowspan="6">$\sigma(x_s)=0$
$(\alpha_s>0)$
$m(x_s)\neq 0$
$(\beta_s=0)$
流动点
(shunt)</td><td>$\alpha_s<1$</td><td colspan="3"></td><td>规则</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\alpha_s=1$</td><td colspan="3">$m(x_1)<0$ 或 $m(x_r)>0$</td><td>越出</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$m(x_1)>0$
或
$m(x_r)<0$</td><td colspan="2">$0<c_s<1$</td><td>规则</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c_s\geqslant 1$</td><td>进入</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\alpha_s>1$</td><td colspan="3">$m(x_1)<0$ 或 $m(x_r)>0$</td><td>越出</td></tr>
<tr><td colspan="3">$m(x_1)>0$ 或 $m(x_r)>0$</td><td>进入</td></tr>
<tr><td rowspan="13">$\sigma(x_s)$
$(\alpha_s>0)$
$m(x_s)=0$
$(\beta_s>0)$
(套点,
trap)</td><td rowspan="3">$\alpha_s<1$</td><td colspan="3">$\alpha_s<1$</td><td>规则</td></tr>
<tr><td colspan="3">$1\leqslant\alpha_s<2$</td><td>越出</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\alpha_s\geqslant 2$</td><td>吸引自然</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\alpha_s>1$</td><td rowspan="2">$\beta_s<1$</td><td colspan="2">$m(x_1^+)<0$ 或 $m(x_r^-)>0$</td><td>越出</td></tr>
<tr><td colspan="2">$m(x_1^+)>0$ 或 $m(x_r^-)<0$</td><td>进入</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\beta_s\geqslant 1$</td><td colspan="2">$m(x_1^+)<0$ 或 $m(x_r^-)>0$</td><td>吸引自然</td></tr>
<tr><td colspan="2">$m(x_1^+)>0$ 或 $m(x_r^-)<0$</td><td>排斥自然</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$\alpha_s=1$</td><td rowspan="3">$\beta_s<1$</td><td rowspan="2">$c_s>\beta_s$</td><td>$c_s\geqslant 1$</td><td>进入</td></tr>
<tr><td>$c_s<1$</td><td>规则</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c_s\leqslant\beta_s$</td><td>越出</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\beta_s\geqslant 1$</td><td colspan="2">$c_s>\beta_s$</td><td>排斥自然</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$c_s\leqslant\beta_s$</td><td>$c_s\geqslant 1$</td><td>严格自然</td></tr>
<tr><td>$c_s<1$</td><td>吸引自然</td></tr>
</table>

4. 第二类奇异边界

设 $m(x_s)$ 无界而 $|x_s|<\infty$。

①若 $x \to x_s$, $\sigma^2(x) = O(|x - x_s|^{-\alpha_s})$, $\alpha_s \geqslant 0$, 则称 α_s 为 x_s 的扩散指数;

②若 $x \to x_s$ 时,

$m(x)=O(|x-x_s|^{-\beta_s})$，$\beta_s\geqslant 0$，则称 β_s 为 x_s 的漂移指数；

③若 $x\to x_l^+$ 或 $x\to x_r^-$ 时，

$$c_l=\lim_{x\to x_l^+}\frac{2m(x)(x-x_l)^{\beta_l-\alpha_l}}{\sigma^2(x)}$$

$$c_r=-\lim_{x\to x_r^-}\frac{2m(x)(x_r-x)^{\beta_r-\alpha_r}}{\sigma^2(r)}$$

则称 c_l、c_r 为特征标值。

第二类奇异边界 $x_s(|x_s|<\infty)$ 的分类可由 α_s、β_s 以及 c_l、c_r 来确定，具体见表 2-3 所示。

表 2-3　$|x_s|<\infty$ 的奇异边界分类表

系　数	条　件			类　别
$\|m(x_s)\|=\infty$ $(\beta_s>0)$ $\sigma(x_s)<\infty$ $(\alpha_s=0)$	$\beta_s<1$			规则
	$\beta_s=1$	$c_s\leqslant -1$		越出
		$-1<c_s<1$		规则
		$c_s\geqslant 1$		进入
	$\beta_s>1$	$m(x_l^+)<0$ 或 $m(x_r^-)>0$		越出
		$m(x_l^+)>0$ 或 $m(x_r^-)<0$		进入
$\|m(x_s)\|=\infty$ $(\beta_s>0)$ $\sigma(x_s)=\infty$ $(\sigma_s>0)$	$\beta_s<1$			规则
	$\beta_s>1$	$m(x_l^+)<0$ 或 $m(x_r^-)>0$		越出
		$m(x_l^+)>0$ 或 $m(x_r^-)<0$		进入
	$\beta_s=1$	$c_s\geqslant -\beta_s$	$c_s\geqslant 1$	进入
			$c_s<1$	规则
		$c_s<-\beta_s$		越出

5. 无穷远处第二类奇异边界

设 $m(x_s)$ 无界而 $|x_s|=\infty$。

①若 $|x|\to\infty$，$\sigma^2(x)=O(|x|^{\alpha_s})$，$\alpha_s\geqslant 0$，则称 α_s 为 x_s 的扩散指数；

②若 $|x|\to\infty$，$m(x)=O(|x|^{\beta_s})$，$\beta_s\geqslant 0$，则称 β_s 为 x_s 的漂移指数；

③若 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$，

$$c_l=\lim_{x\to\infty}\frac{2m(x)|x|^{\alpha_l-\beta_l}}{\sigma^2(x)}$$

$$c_r=-\lim_{x\to\infty}\frac{2m(x)|x|^{\alpha_r-\beta_r}}{\sigma^2(x)}$$

则称 c_l、c_r 为 $|x_s|=\infty$ 特征标值。

第二类奇异边界 $x_s(|x_s|=\infty)$ 的分类可由 α_s、β_s 以及 c_l、c_r 来确定，具体见表 2-4 所示。

表 2-4　当 $|x_s|=\infty$ 的奇异边界分类表

<table>
<tr><th>系　数</th><th colspan="4">条　　件</th><th>类　别</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$m(x_s)=\infty$
$(\beta_s>0)$
$\sigma(x_s)<\infty$
$(\alpha_s=0)$</td><td rowspan="2">$m(-\infty)<0$
或 $m(+\infty)>0$</td><td colspan="3">$\beta_s>1$</td><td>规则</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\beta_s\leqslant 1$</td><td>越出</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$m(-\infty)>0$
或 $m(+\infty)<0$</td><td colspan="3">$\beta_s>1$</td><td>规则</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\beta_s\leqslant 1$</td><td>进入</td></tr>
<tr><td rowspan="11">$|m(x_s)|=\infty$
$(\beta_s>0)$
$\sigma(x_s)=\infty$
$(\alpha_s>0)$</td><td rowspan="4">$\beta_s>\alpha_s-1$</td><td colspan="2" rowspan="2">$m(-\infty)<0$
或 $m(+\infty)>0$</td><td>$\beta_s>1$</td><td>越出</td></tr>
<tr><td>$\beta_s\leqslant 1$</td><td>吸引自然</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$m(-\infty)>0$
或 $m(+\infty)<0$</td><td>$\beta_s>1$</td><td>进入</td></tr>
<tr><td>$\beta_s\leqslant 1$</td><td>排斥自然</td></tr>
<tr><td>$\beta_s<\alpha_s-1$</td><td colspan="3"></td><td>规则</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$\beta_s=\alpha_s-1$</td><td rowspan="3">β_s</td><td>$c_s>-\beta_s$</td><td></td><td>排斥自然</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$c_s\leqslant -\beta_s$</td><td>$c_s\geqslant -1$</td><td>严格自然</td></tr>
<tr><td>$c_s<-1$</td><td>吸引自然</td></tr>
<tr><td rowspan="3">β_s</td><td rowspan="2">$c_s>-\beta_s$</td><td>$c_s\geqslant -1$</td><td>进入</td></tr>
<tr><td>$c_s<-1$</td><td>规则</td></tr>
<tr><td>$c_s\leqslant -\beta_s$</td><td></td><td>越出</td></tr>
</table>

2.4.3　二维 Markov 随机过程的概率密度函数计算

对于具有周期激励的非线性随机动力系统，可以运用随机平均法将系统化为标准的 Ito 方程(组)，其 FPK 方程已不能用直接积分的方法得到其稳态概率密度函数，所以必须借助于其他算法计算系统满足某些条件时的稳态概率密度函数。

在此介绍待定系数法，且仅以二维系统为例进行阐述。

设有二维随机过程 $(a(t),\varphi(t))$，满足随机微分方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}&=f_1(t,a,\varphi)+g_1(t,a,\varphi,\zeta_1(t),\zeta_2(t))\\ \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}&=f_2(t,a,\varphi)+g_2(t,a,\varphi,\zeta_1(t),\zeta_2(t))\end{aligned}\right\}\tag{2-82}$$

并且设

$$\left[\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(a,\varphi)}\right]_t[g_1,g_2]^{\mathrm{T}}_{t+\tau}=\begin{bmatrix}g_{1a}(t)g_1(t+\tau)+g_{1\varphi}(t)g_2(t+\tau)\\ g_{2a}(t)g_1(t+\tau)+g_{2\varphi}(t)g_2(t+\tau)\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}h_1(t,a,\varphi,\tau)\\ h_2(t,a,\varphi,\tau)\end{bmatrix}$$

对系统(2-82)应用随机平均法可以得到如下标准的 Ito 方程：

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}a(t)&=F_1(a,\varphi)+\sigma_{11}\mathrm{d}W_1+\sigma_{12}\mathrm{d}W_2\\ \mathrm{d}\varphi(t)&=F_2(a,\varphi)+\sigma_{21}\mathrm{d}W_1+\sigma_{22}\mathrm{d}W_2\end{aligned}\right\}\tag{2-83}$$

其中 $W_1(t)$、$W_2(t)$ 为独立的标准 Wiener 随机过程，而 $F_1(a,\varphi)$、$F_2(a,\varphi)$、$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(a,\varphi)(i,j=1,2)$ 的表达式如下：

$$F_1(a,\varphi)=\langle f_1(t,a,\varphi)\rangle_t+\left\langle\int_{-\infty}^{0}E[h_1(t,a,\varphi,\tau)]\mathrm{d}\tau\right\rangle_t$$

$$F_2(a,\varphi)=\langle f_2(t,a,\varphi)\rangle_t+\left\langle\int_{-\infty}^{0}E[h_2(t,a,\varphi,\tau)]\mathrm{d}\tau\right\rangle_t$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2\\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2\end{bmatrix}=\left\langle\int_{-\infty}^{+\infty}E\left(\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}[g_1 \quad g_2]_{t+\tau}\right)\mathrm{d}\tau\right\rangle_t$$

显然 $\sigma_{12}^2=\sigma_{21}^2$，这样所得到的 $[a(t) \quad \varphi(t)]$ 为二维的 Markov 过程，其转移概率密度函数记为 $P(a,\varphi,t)|(a_0,\varphi_0,t_0)$，它满足下列的 FPK 方程：

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial(F_1P)}{\partial a}+\frac{\partial(F_2P)}{\partial\varphi}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2(\sigma_{11}^2P)}{\partial a^2}+\frac{2\partial^2(\sigma_{12}^2P)}{\partial a\partial\varphi}+\frac{\partial^2(\sigma_{22}^2P)}{\partial\varphi^2}\right] \tag{2-84}$$

在大量的研究工作中，人们所关注的是稳态响应的概率密度。

设 $\lim\limits_{t\to\infty}P(a,\varphi,t|a_0,\varphi_0,t_0)=Q(a,\varphi)$，则有稳态概率密度函数 $Q(a,\varphi)$ 满足如下方程：

$$\frac{\partial(F_1Q)}{\partial a}+\frac{\partial(F_2Q)}{\partial\varphi}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2(\sigma_{11}^2Q)}{\partial a^2}+\frac{2\partial^2(\sigma_{12}^2Q)}{\partial a\partial\varphi}+\frac{\partial^2(\sigma_{22}^2Q)}{\partial\varphi^2}\right] \tag{2-85}$$

在此引入待定参数 μ，使得下式成立：

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[F_1Q-\frac{1}{2}\frac{\partial(\sigma_{11}^2Q)}{\partial a}-\mu\frac{\partial(\sigma_{12}^2Q)}{\partial\varphi}\right]=-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[F_2Q-\frac{1}{2}\frac{\partial(\sigma_{22}^2Q)}{\partial\varphi}+(\mu-1)\frac{\partial(\sigma_{12}^2Q)}{\partial a}\right] \tag{2-86}$$

作进一步假设，有下列条件成立：

$$F_1Q-\frac{1}{2}\frac{\partial(\sigma_{11}^2Q)}{\partial a}-\mu\frac{\partial(\sigma_{12}^2Q)}{\partial\varphi}=0,\quad F_2Q-\frac{1}{2}\frac{\partial(\sigma_{22}^2Q)}{\partial\varphi}+(\mu-1)\frac{\partial(\sigma_{12}^2Q)}{\partial a}=0$$

由微分方程的理论，可设 $Q(a,\varphi)=\exp(u(a,\varphi))$，代入上面二式可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial a}&=\frac{1}{\Delta}\left[\sigma_{22}^2\left(2F_1-\frac{\partial(\sigma_{11}^2)}{\partial a}-2\mu\frac{\partial(\sigma_{12}^2)}{\partial\varphi}\right)-2\mu\sigma_{12}^2\left(2F_2-\frac{\partial(\sigma_{22}^2)}{\partial\varphi}+2(\mu-1)\frac{\partial(\sigma_{12}^2)}{\partial a}\right)\right]\\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}&=\frac{1}{\Delta}\left[\sigma_{11}^2\left(2F_2+2(\mu-1)\frac{\partial(\sigma_{12}^2)}{\partial a}-\frac{\partial(\sigma_{22}^2)}{\partial\varphi}\right)+(\mu-1)\sigma_{12}^2\left(4F_1-2\frac{\partial(\sigma_{11}^2)}{\partial a}-4\mu\frac{\partial(\sigma_{12}^2)}{\partial\varphi}\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{2-87}$$

其中 $\Delta=4\mu(\mu-1)\sigma_{12}^4+\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2\neq0$，即 $\mu\neq\frac{1}{2\sigma_{12}^2}(\sigma_{12}^2\pm\sqrt{\sigma_{12}^4-\sigma_{12}^2\sigma_{22}^2})$。

所以若能找到恰当数值 μ，使得函数 $u(\alpha,\varphi)$ 满足二阶偏导连续条件，即 $\frac{\partial^2u}{\partial a\partial\varphi}$、$\frac{\partial^2u}{\partial\varphi\partial a}$ 连续，则有 $\frac{\partial^2u}{\partial a\partial\varphi}=\frac{\partial^2u}{\partial\varphi\partial a}$，也称为可积性条件。进而有 $u(a,\varphi)=\int\frac{\partial u}{\partial a}\mathrm{d}a+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi$，即得到响应过程 $(a(t),\varphi(t))$（二维 Markov 随机过程）的概率密度函数

$$Q(a,\varphi)=C\exp\left(\int\frac{\partial u}{\partial a}\mathrm{d}a+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi\right) \tag{2-88}$$

其中，C 为归一化常数。

2.4.4 随机动力系统的增维精细积分法

考虑随机非线性动力系统（Ito 随机微分方程）

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{\psi}(t)) \tag{2-89}$$

其中 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$，$t\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{\psi}(t)$ 为 m 维随机向量，可以记为

$$\boldsymbol{\psi}(t)=[\zeta_1(t) \quad \zeta_2(t) \quad \cdots \quad \zeta_m(t)]^{\mathrm{T}}$$

并设 $\zeta_1(t),\zeta_2(t),\cdots,\zeta_m(t)$为相互独立的标准 Gauss 白噪声，即有

$$E[\zeta_i(t)\quad \zeta_j(t+\tau)]=\delta_{ij}(\tau)$$

已知 $\boldsymbol{X}(t)=[X_1(t)\quad X_2(t)\quad\cdots\quad X_n(t)]^{\mathrm{T}}$ 为状态过程（变量），将 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{\psi}(t))$改写为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{\psi}(t))=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{\psi}(t))\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{\psi}(t))\tag{2-90}$$

上式中的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{\psi}(t))$与 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{\psi}(t))$可能皆显含随机项 $\boldsymbol{\psi}(t)$。

引入变量 $X_{n+1}\equiv 1$，则有 $\dot{X}_{n+1}\equiv 0$，将原系统改写为齐次形式：

$$\dot{\boldsymbol{Y}}=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{X}}\\ \dot{\boldsymbol{X}}_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\varphi}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{X}_{n+1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{X}_{n+1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{BY}\tag{2-91}$$

上式在形式上已化为线性齐次方程，记时间步长为 τ，$t_k=k\tau$，在很小的时间间隔$[t_{k-1},t_k]$内，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的变化很小，即式(2-91) 可以改写为

$$\dot{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{B}_{k-1}\boldsymbol{Y}\tag{2-92}$$

其中 $\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_{n+1}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}_{k-1}=\boldsymbol{B}[(k-1)\tau]$，$k=1,2,\cdots,p$。

在此要模拟出各个节点处的 $\xi_1(t),\xi_2(t),\cdots,\xi_m(t)$的值，并与 $t_{k-1}=(k-1)\tau$，Y_{k-1}的值一同代入，计算矩阵 B_{k-1}。在模拟计算 $\xi_1(t),\xi_2(t),\cdots,\xi_m(t)$的值时，采用 Box-Muller 法模拟标准高斯白噪声，具体做法如下。

设随机变量 u_k 在(0,1)服从均匀分布，构造随机数序列$\{\xi_j^k\}$：

$$\xi_j^{k-1}=\sqrt{-2\ln\, u_{k-1}}\cos(2\pi u_k)$$

$$\xi_j^{k}=\sqrt{-2\ln\, u_{k-1}}\sin(2\pi u_k)$$

其中，$j=1,2,\cdots,m$，k 的取值应保证$\{\xi_j^k\}$中有 p 个随机量。

对于每一个 j 值，u_k 的值是每次要刷新重取的，以保证 $\xi_1(t),\xi_2(t),\cdots,\xi_m(t)$的独立性。这样可以在一个时间步长内对式(2-92)进行精细积分，在区间$[t_{k-1},t_k]$上，式(2-92)的解可以表示为

$$\boldsymbol{Y}(k\tau)=\exp[\tau\boldsymbol{B}_{k-1}]\boldsymbol{Y}[(k-1)\tau]=\left(\exp\left[\frac{\tau}{q}\boldsymbol{B}_{k-1}\right]\right)^q\boldsymbol{Y}[(k-1)\tau]\tag{2-93}$$

其中 $q=2^p$，并设 $\Delta t=\dfrac{\tau}{q}$，则可得如下表达式：

$$\exp[\Delta t\boldsymbol{B}_{k-1}]\approx E+\Delta t\cdot\boldsymbol{B}_{k-1}+\frac{(\Delta t\cdot\boldsymbol{B}_{k-1})^2}{2!}=E+Q_s\tag{2-94}$$

其中 $Q_s=\Delta t\cdot\boldsymbol{B}_{k-1}+\dfrac{(\Delta t\cdot\boldsymbol{B}_{k-1})^2}{2!}$。

$$\begin{aligned}\text{设}\quad Q_{k-1}=\exp[\tau\boldsymbol{B}_{k-1}]&=(E+Q_s)^{2^p}\\&=(E+Q_s)^{2^{p-1}}(E+Q_s)^{2^{p-1}}\\&=(E+(2Q_s+Q_s^2))^{2^{p-1}}\end{aligned}\tag{2-95}$$

所以进行这样的迭代：$Q_s=2Q_s+Q_s^2$，其中，$Q_s^2=Q_s\cdot Q_s$ 为矩阵的幂。

计算 Q_{k-1}的迭代流程图如图 2-15 所示。当循环结束时，得到式(2-94)中的迭代矩阵，即有

$$\boldsymbol{Y}(k\tau)=Q_{k-1}\boldsymbol{Y}[(k-1)\tau],\quad k=1,2,\cdots,p$$

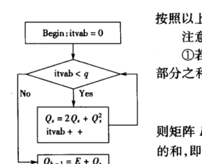


图 2-15 计算迭代矩阵 Q_{k-1} 的算法流程

按照以上算法可编制计算机程序完成计算工作。

注意:

①若可将 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{\psi}(t)),\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{\psi}(t))$写为确定与随机两部分之和,即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{\psi}(t))=\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{X},t)+\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{\psi}(t))$$
$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{\psi}(t))=\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{X},t)+\boldsymbol{\Phi}_2(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{\psi}(t))$$

则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可以相应地写成确定部分矩阵 $\boldsymbol{B}_D$ 与随机部分矩阵 $\boldsymbol{B}_S$ 的和,即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_D+\boldsymbol{B}_S$$

其中 $\boldsymbol{B}_D=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{\Phi}_1\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}_S=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{\Phi}_2\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$。

②若①中的随机部分矩阵 $\boldsymbol{B}_S\equiv\boldsymbol{0}$,则式(2-89)转为确定系统,即在随机增维精细积分算法中去掉随机部分的内容(所有随机项的系数全取为零),同样可计算确定系统的数值解。

2.4.5 随机增维精细积分法应用举例

本节举例说明随机增维精细积分法的使用,同时与相应的确定系统进行比较,以期形象地展示随机动力系统性态的复杂性。

已知有二维随机动力系统(Ito 随机微分方程)

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2+2\xi_1(t)-0.1x_2\xi_2(t)\\ \dot{x}_2&=-0.3x_2+x_1-x_1^3+\mu\cos(1.2t)+3x_1\xi_3(t)\sin(2t)\end{aligned}\right\}\tag{2-96}$$

其中 $\xi_i(t)(i=1,2,3)$ 为独立的零均值标准 Gauss 白噪声。

在此可取

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1-x_1^2 & -0.3\end{bmatrix},\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}2\xi_1(t)-0.1x_2\xi_2(t)\\ \mu\cos(1.2t)+3x_1\xi_3(t)\sin(2t)\end{bmatrix}$$

即矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\xi_1(t)-0.1x_2\xi_2(t)\\ 1-x_1^2 & -0.3 & \mu\cos(1.2t)+3x_1\xi_3(t)\sin(2t)\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

当然 $\boldsymbol{B}$ 也可以写作

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_D+\boldsymbol{B}_S$$

其中 $$\boldsymbol{B}_D=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1-x_1^2 & -0.3 & \mu\cos(1.2t)\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_S=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\xi_1(t)-0.1x_2\xi_2(t)\\ 0 & 0 & 3x_1\xi_3(t)\sin(2t)\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}。$$

随机系统(2-96)的相应的确定系统为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=-0.3x_2+x_1-x_1^3+\mu\cos(1.2t)\end{aligned}\right\}\tag{2-97}$$

系统(2-97)为一个典型的受外激励的 Duffing 方程,以 μ 为分岔参数,分析系统(2-97)的性态可知,系统存在 1、2、4、8 周期分岔以及混沌态等各种响应,而响应的随机系统会呈现何种性态,下面用随机增维精细积分法对系统((2-96)及(2-97))进行数字模拟,比较所得结果,认

识随机动力系统的复杂性。

①当分岔参数 $\mu=0.2867$ 时，系统(2-97)的确定系统具有 4 周期分岔，而相应的随机系统却有极为混乱的相图与时程图(以下随机系统的数据中为某次模拟的结果)，如图 2-16、图 2-17 所示。

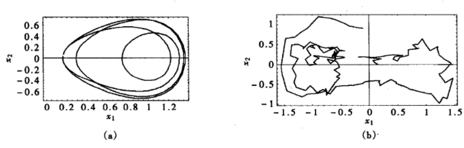


图 2-16　确定系统与随机系统在 $\mu=0.2867$ 的相图比较($p=160,\tau=0.13$)

(a)确定系统；(b)随机系统

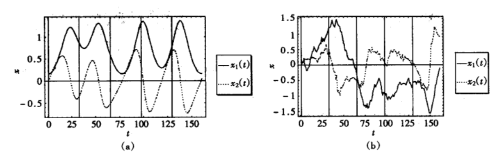


图 2-17　确定系统与随机系统的状态变量 x_1、x_2 在 $\mu=0.2867$ 时的时程图($p=160,\tau=0.13$)

(a)确定系统；(b)随机系统

②当分岔参数 $\mu=0.287106$ 时，确定系统具有 8 周期分岔，而相应的随机系统却有极为混乱的相图与时程图(以下随机系统的数据中为某次模拟的结果)，如图 2-18、图 2-19 所示。

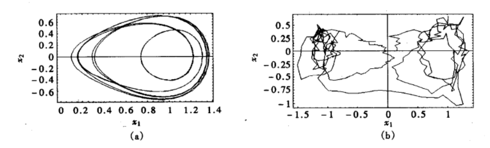


图 2-18　确定系统与随机系统在 $\mu=0.287106$ 时的相图比较($p=320,\tau=0.13071829$)

(a)确定系统；(b)随机系统

③当分岔参数 $\mu=0.32$ 时，系统(2-97)呈混沌态，而相应的随机系统的状态变量却有极为混乱的激增或骤减的相图（随机系统的数据中为某次模拟的结果)，如图 2-20、图 2-21 所示，

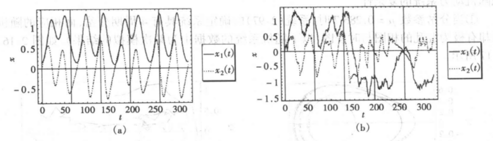


图 2-19 确定系统与随机系统的状态变量 x_1、x_2 在 $\mu=0.287\ 106$ 时的时程图($p=320,\tau=0.130\ 718\ 29$)

(a)确定系统;(b)随机系统

这正充分说明了确定系统在受到随机激励后具有极大的不确定性。

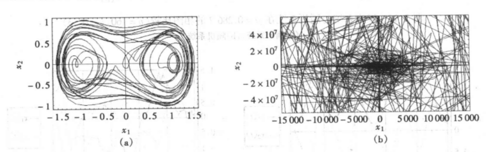


图 2-20 确定系统与随机系统在 $\mu=0.32$ 时的相图比较($p=1\ 000,\tau=0.2$)

(a)确定系统;(b)随机系统

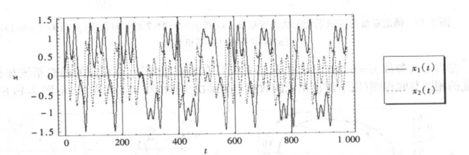


图 2-21 确定系统的状态变量 x_1、x_2 在 $\mu=0.32$ 时的时程图($p=1\ 000,\tau=0.2$)

本节介绍的随机增维精细积分法对随机向量的维数以及随机项的强度皆没有限制。随机项的类型可以是非白噪声项,如有界实噪声等皆可。在进行数字模拟时,改变相应的随机项产生程序即可。

通过应用随机增维精细积分法对随机系统的数字模拟,可以看到原来具有规律性演化的确定动力系统,在受到随机激励后常常会失去原有的规律而出现极为混乱状态,是否还有概率意义上的规律可寻,这还需要作足够量(次数)的模拟以及理论上的分析才能得出结论。

通过以上举例,将随机系统与确定系统进行对比,说明本节建立的随机增维精细积分法可作为数字模拟随机动力系统演化的行之有效的方法之一。

第 3 章　数值计算及模拟

3.1　数值计算方法

3.1.1　数值计算方法的研究对象与特点

数值计算方法，数学工作者称之为数值分析，它是应用数学尤其是计算数学的一个主要分支。而计算数学是研究用计算机求解各种数学问题的数值计算方法及其理论与软件实现。用计算机解决科学计算问题一般经历如下几个过程：

实际问题→数学模型→数值计算方法→程序设计→上机计算求出结果。

由实际问题的提出到上机求得问题的解答的整个过程都可以看作是应用数学的范畴。如果细分的话，应用相关科学知识和数学理论建立模型这一过程，通常作为应用数学的任务。对于数值分析非数学专业的学者常称之为数值计算方法，要完成由模型到计算得到结果的全过程，需要关注 4 大特点：

①面向计算机，要根据计算机特点提供切实可行的有效算法；

②有可靠的理论分析，能任意逼近并到达精度要求，对近似算法要保证收敛性和数值稳定性，还要对误差进行分析，它关系到算法能否在计算机上实现；

③要有好的计算复杂性，时间复杂性好是指节约时间，空间复杂性好是指节约存储量，这也是建立算法要研究的问题，它关系到算法能否在计算机上实现；

④要有数值实验，即任何一个算法除了从理论上要满足上述 3 点外，还要通过数值实验证明是行之有效的。

人们在科学研究中，往往会建立各种形式的动力系统，而其中相当一部分经过适当的转化后都会化成求解常微分方程的定解问题。这类问题最简单的形式是如下一阶方程的初值问题：

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \tag{3-1}$$

已知只需函数 $f(x,y)$ 适当光滑，如关于 y 满足利普希茨(Lipshchitz)条件 $|f(x,y)-f(x,\bar{y})| \leqslant L|y-\bar{y}|$，理论上就可保证式(3-1)的解 $y=y(x)$ 存在并且唯一。虽有多种求解常微分方程的解析方法，但解析方法只适用于求解一些特殊类型的方程，实际问题中归结出的微分方程更多地只能用数值方法求解。

所谓数值解法，就是计算解 $y(x)$ 在渐增的离散节点 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots$ 上的近似值 $y_1,y_2,\cdots,y_n,y_{n+1},\cdots$。相邻两个节点的间距 $h_n=x_{n+1}-x_n$ 称为步长。此后如无特别说明，总假定 $h_i=h(i=1,2,\cdots)$ 为定值，即 $x_n=x_0+nh, n=0,1,2,\cdots$。

初值问题的数值解法有个基本特点，即采取“步进式”，求解过程顺着节点排列的次序一步一步地向前推进。描述这类算法，只需给出用已知信息 $y_n,y_{n-1},y_{n-2},\cdots$ 计算 y_{n+1} 的递推公

式。

首先,要对方程(3-1)离散化,建立求数值解的递推公式。一类算法是计算 y_{n+1}时只用到前一点的值 y_n,称为单步法。另一类算法是用到 y_{n+1}前面 k 点的值:$y_n, y_{n-1}, \cdots, y_{n-k+1}$,称为 k 步法。其次,要研究公式的局部截断误差和阶,数值解 y_n 与精确解 $y(x_n)$的误差估计及收敛性,还有递推公式的计算稳定性等问题。

3.1.2 简单的数值方法与基本概念

1.欧拉(Euler) 法与后退欧拉法

在 Oxy 平面上,微分方程(3-1)的解 $y = y(x)$称作它的积分曲线。积分曲线上一点(x, y)在 Oxy 平面上建立一个方向场,那么积分曲线上每一点的切线方向场在该点的方向相一致。基于上述几何解释,从初始点 $P_0(x_0, y_0)$出发,先依方向场在该点的方向推进到上一点 $x = x_1$,然后再从 P_1 依方向场的方向推进到 $x = x_2$ 上一点 P_2,循此前进,作出一条折线 $P_0P_1P_2\cdots$。一般地,设已作出该折线的顶点 P_n,过 $P_n(x_n, y_n)$依方向场的方向再推进到 $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$,显然两个顶点 P_n、P_{n+1}的坐标有关系$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = f(x_n, y_n)$,即有

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{3-2}$$

这就是著名的欧拉公式。若初值 y_0 已知,公式(3-2)可逐步算出

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1), \cdots$$

例 3.1 求解初值问题

$$\left.\begin{array}{l} y' = y - \dfrac{2x}{y} \quad (0 < x < 1) \\ y(0) = 1 \end{array}\right\} \tag{3-3}$$

解:用欧拉方法,欧拉公式的具体形式为

$$y_{n+1} = y_n + h\left(y_n - \frac{2x_n}{y_n}\right)$$

取步长 $h = 0.1$,计算结果见表 3-1。

表 3-1 计算结果对比

x_n	y_n	$y(x_n)$	x_n	y_n	$y(x_n)$
0.1	1.100 0	1.095 4	0.6	1.509 0	1.483 2
0.2	1.191 8	1.183 2	0.7	1.580 3	1.549 2
0.3	1.277 4	1.264 9	0.8	1.649 8	1.612 5
0.4	1.358 2	1.341 6	0.9	1.717 8	1.673 3
0.5	1.435 1	1.414 2	1.0	1.784 8	1.732 1

初值问题(3-3)有解析解 $y = \sqrt{1 + 2x}$,由解析式算出的准确值 $y(x_n)$同近似值 y_n 比较可以看出欧拉方法的精度较差。

为了分析计算公式的精度,通常可用泰勒展开公式将 $y(x_{n+1})$在 x_n 处展开,则有

$$y(x_{n+1})=y(x_n+h)=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{h^2}{2}y''(\xi_n),\xi_n\in(x_n,x_{n+1})$$

在 $y_n=y(x_n)$的前提下,$f(x_n,y_n)=f(x_n,y(x_n))=y'(x_n)$。于是可得公式(3-2)的误差为

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{h^2}{2}y''(\xi_n)\approx\frac{h^2}{2}y''(x_n) \tag{3-4}$$

该误差称为欧拉法的局部截断误差。

如果对方程(3-1)从 x_n 到x_{n+1}积分,得

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_n^{n+1}f(t,y(t))\mathrm{d}t \tag{3-5}$$

右端积分用左端矩形 $hf(x_n,y(x_n))$近似,再以 y_n 代替$y(x_n)$、y_{n+1}代替 $y(x_{n+1})$,也得到式(3-2)且局部截断误差也是式(3-4);如果在式(3-5)中右端积分用右端矩形 $hf(x_{n+1},y(x_{n+1}))$近似,则得另一个公式

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1}) \tag{3-6}$$

该式称为后退欧拉公式。

后退欧拉公式与欧拉公式有着本质的区别,后者是关于 y_{n+1}的一个直接的计算公式,这类公式称作是显式的;然而公式(3-6)的右端含有未知的 y_{n+1},它实际上是关于 y_{n+1}的一个函数方程,这类公式称作是隐式的。显式与隐式两类方法各有特点。考虑到数值稳定性等其他因素,人们有时需要选用隐式方法,但使用显式算法远比隐式方便。隐式方程(3-6)通常用迭代法求解,而迭代过程的实质是逐步显式化。

设用欧拉公式 $y_{n+1}^0=y_n+hf(x_n,y_n)$,给出迭代初值 $y_{n+1}^{(0)}$,用它代入式(3-6)的右端,使之转化为显式,直接计算得 $y_{n+1}^{(1)}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1}^{(0)})$;然后再用 $y_{n+1}^{(1)}$代入式(3-6),又有 $y_{n+1}^{(2)}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1}^{(1)})$,如此反复进行,得

$$y_{n+1}^{(k+1)}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})\quad(k=0,1,\cdots) \tag{3-7}$$

由于 $f(x,y)$对 y 满足利普希茨条件,由式(3-7)减式(3-6)得

$$|y_{n+1}^{(k+1)}-y_{n+1}|=h|f(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})-f(x_{n+1},y_{n+1})|\leqslant hL|y_{n+1}^{(k)}-y_{n+1}|$$

式中,L 为$f(x,y)$关于 y 的利普希茨常数。由此可知,只要 $hL<1$ 迭代法(3-7)就收敛到解 y_{n+1}。关于后退欧拉方法的公式误差,从积分公式看到它与欧拉法是相似的。

2.梯形方法

为得到比欧拉法精度高的计算公式,在等式(3-5)右端积分中若用梯形求积公式近似,并用 y_n 代替$y(x_n)$,y_{n+1}代替 $y(x_{n+1})$,则得

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})] \tag{3-8}$$

该式称为梯形方法。梯形方法是隐式单步法,可用迭代法求解。同后退的欧拉方法一样,仍用欧拉方法提供迭代初值,则梯形方法的迭代公式为

$$\left.\begin{aligned}y_{n+1}^{(0)}&=y_n+hf(x_n,y_n)\\ y_{n+1}^{(k+1)}&=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})]\end{aligned}\right\}\quad(k=0,1,2,\cdots) \tag{3-9}$$

为了分析迭代过程的收敛性,将式(3-8)与式(3-9)相减,得

$$y_{n+1}-y_{n+1}^{(k+1)}=\frac{h}{2}[f(x_{n+1},y_{n+1})-f(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})]$$

于是有 $|y_{n+1}-y_{n+1}^{(k+1)}|\leqslant\frac{hL}{2}|y_{n+1}-y_{n+1}^{(k)}|$，式中 L 为 $f(x,y)$ 关于 y 的利普希茨常数。如果选取 h 充分小，使得 $\frac{hL}{2}<1$，则当 $k\to\infty$ 时有 $y_{n+1}^{(k)}\to y_{n+1}$，这说明迭代过程式(3-9)是收敛的。

3. 单步法的局部截断误差与阶

初值问题式(3-1)的单步法可用一般形式表示为

$$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h) \tag{3-10}$$

$\varphi(x,y,h)$ 称为增量函数，如对欧拉法式(3-2)有 $\varphi(x,y,h)=f(x,y)$。它的局部截断误差已由式(3-4)给出，对一般显式单步法则可如下定义。

定义 3.1 设 $y(x)$ 是初值问题式(3-1)的准确解，

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-h\varphi(x_n,y(x_n),h) \tag{3-11}$$

称为显式单步法式(3-10)的局部截断误差。

T_{n+1} 之所以称为局部的，是假设在 x_n 前各步没有误差。当 $y_n=y(x_n)$ 时，计算一步，则有

$$\begin{aligned}y(x_{n+1})-y_{n+1}&=y(x_{n+1})-[y_n+h\varphi(x_n,y_n,h)]\\&=y(x_{n+1})-y(x_n)-h\varphi(x_n,y(x_n),h)=T_{n+1}\end{aligned}$$

所以，局部截断误差可理解为用式(3-10)计算一步的误差，即公式(3-10)中用准确解 $y(x)$ 代替数值解产生的公式误差。根据定义，显然欧拉法的局部截断误差

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-hf(x_n,y(x_n))=\frac{h^2}{2}y''(x_n)+O(h^3)$$

即为式(3-4)的结果。这里 $\frac{h^2}{2}y''(x_n)$ 称为局部截断误差主项。显然 $T_{n+1}=O(h^2)$，一般情形的定义如下。

定义 3.2 设 $y(x)$ 是初值问题式(3-1)的准确解，若存在最大整数 p 使显式单步法式(3-10)的局部截断误差满足

$$T_{n+1}=y(x+h)-y(x)-h\varphi(x,y,h)=O(h^{p+1}) \tag{3-12}$$

则称式(3-10)具有 p 阶精度。

若将式(3-12)展开式写成

$$T_{n+1}=\psi(x_n,y(x_n))h^{p+1}+O(h^{p+2})$$

则称 $\psi(x_n,y(x_n))h^{p+1}$ 为局部截断误差主项。

以上定义对隐式单步法式(3-6)也是适用的。

例如，对后退欧拉法式(3-6)局部截断误差

$$T_{n+1}=-\frac{h^2}{2}y(x_n)+O(h^3)$$

即 $p=1$，是 1 阶方法，局部截断误差主项为 $-\frac{h^2}{2}y''(x_n)$。

同样对梯形法式(3-8)有

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-\frac{h^2}{2}[y'(x_n)+y'(x_{n+1})]=-\frac{h^3}{12}y'''(x_n)+O(h^4)$$

所以梯形方法式(3-8)是 2 阶的，其局部截断误差主项为 $-\frac{h^2}{12}y'''(x_n)$。

4. 改进的欧拉公式

显然，梯形方法虽提高了精度但其算法复杂，在应用迭代公式(3-9)进行计算时，每迭代一次都要重新计算函数 $f(x,y)$ 的值，而迭代又要反复进行若干次，计算量很大，而且往往难以预测。为了控制计算量，通常只迭代一两次就转入下一步的计算，这就简化了算法。具体地说，先用欧拉公式求得一个初步的近似值 $\bar{y}_{n+1}$，称之为预测值，预测值 $\bar{y}_{n+1}$ 的精度可能很差，再用梯形公式(3-8)将它校正一次，即按式(3-9)迭代一次得 y_{n+1}，这个结果称为校正值，而这样建立的预测—校正系统通常称为改进的欧拉公式(预估校正公式)：

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n)\text{（预估）}\\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]\text{（校正）}\end{aligned}\right\} \tag{3-13}$$

例 3.2　用改进的欧拉方法求解初值问题式(3-3)

解：改进的欧拉公式为 $\begin{cases} y_p = y_n + h\left(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}\right) \\ y_c = y_n + h\left(y_p - \dfrac{2x_{n+1}}{y_p}\right) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c)\end{cases}$，仍取 $h = 0.1$，计算结果见表 3-2。同例 3.1 中欧拉法的计算结果比较，改进欧拉法明显改善了精度。

表 3-2　计算结果对比

x_n	y_n	$y(x_n)$	x_n	y_n	$y(x_n)$
0.1	1.095 9	1.095 4	0.6	1.486 0	1.483 2
0.2	1.184 1	1.183 2	0.7	1.552 5	1.549 2
0.3	1.266 2	1.264 9	0.8	1.615 3	1.616 5
0.4	1.343 4	1.341 6	0.9	1.678 2	1.673 3
0.5	1.416 4	1.414 2	1.0	1.737 9	1.732 1

3.1.3　龙格-库塔方法

龙格-库塔方法(Runge-Kutta)正是数学软件 Matlab(ode23, ode45)与 Mathematica(NDSolve)中使用的解微分方程的数值方法。

1. 显式龙格-库塔法的一般形式

上节给出了显式单步法的表达式(3-10)，其局部截断误差为式(3-12)，对欧拉法 $T_{n+1} = O(h^2)$，即方法为 $p = 1$ 阶，若用改进欧拉法式(3-13)，它可表为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))] \tag{3-14}$$

此时增量函数

$$\varphi(x_n, y_n, h) = \frac{1}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))] \tag{3-15}$$

它比欧拉法的 $\varphi(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n)$ 增加了计算一个右函数 f 的值。若要使得到的公式阶

数 p 更大，φ 就必须包含更多的 f 值。实际上从方程(3-1)等价的积分式(3-5)可以看出，若要使公式阶数提高，就必须使右端积分的数值求积公式精度提高，这必然要增加求积节点。为此可将式(3-5)中的求积公式近似表示为 $\int_n^{n+1} f(x,y(x))\mathrm{d}x \approx h\sum_{i=1}^{r} c_i f(x_n+\lambda_i h, y(x_n+\lambda_i h))$，一般来说点数 r 越多，精度越高。上式右端相当于增量函数 $\varphi(x,y,h)$，为得到便于计算的显式方法，可类似于改进欧拉法，将公式(3-14)表示为

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h) \tag{3-16}$$

其中

$$\varphi(x_n, y_n, h) = \sum_{i=1}^{r} c_i K_i, \tag{3-17}$$

$$K_1 = f(x_n, y_n),\ K_i = f(x_n + \lambda_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1}\mu_{ij}K_j),\ i = 2,\cdots,r$$

这里 c_i、λ_i、μ_{ij} 均为常数。式(3-16)、式(3-17)称为 r 阶显式龙格-库塔法，简称 R-K 方法。

当 $r=1$，$\varphi(x_n,y_n,h)=f(x_n,y_n)$ 时，R-K 方法就是欧拉法，此时方法的阶数 $p=1$。

当 $r=2$，要使公式(3-16)、式(3-17)具有更高的阶 p，就要增加点数 r。

在此给出 $r=2$、3、4 时的常用 R-K 公式。

(1)2 阶显式 R-K 方法

对 $r=2$ 的 R-K 方法，由式(3-16)、式(3-17)可得到如下的计算公式：

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(c_1K_1 + c_2K_2) \\ K_1 &= f(x_n, y_n) \\ K_2 &= f(x_n + \lambda_2 h, y_n + \mu_{21} hK_1) \end{aligned}\right\} \tag{3-18}$$

这里 c_1、c_2、λ_2、μ_{21} 均为待定常数，通常希望适当选取这些系数，使公式阶数 p 尽量高。若设 $c_2 = a \neq 0$，则得 $c_1 = 1-a$，$\lambda_2 = \mu_{21} = \frac{1}{2a}$，这样得到的公式称为 2 阶 R-K 方法。

若取 $a=\frac{1}{2}$，则 $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$，$\lambda_2 = \mu_{21} = 1$，这就是改进欧拉法式(3-14)。

若取 $a=1$，则 $c_2=1$，$c_1=0$，$\lambda_2=\mu_{21}=\frac{1}{2}$，得计算公式

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hk_2 \\ K_1 &= f(x_n, y_n) \\ K_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right) \end{aligned}\right\} \tag{3-19}$$

称为中点公式，相当于数值积分的中矩形公式。

式(3-19)也可表示为 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}f\left(x_n + h, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right)$，可以证明 $r=2$ 的显式 R-K 方法的阶只能是 2，而不能得到 3 阶公式。

(2)3 阶与 4 阶显式 R-K 方法

当 $r=3$ 时，式(3-16)、式(3-17)的公式表示为

$$
\left.\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3)\\
K_1 &= f(x_n, y_n)\\
K_2 &= f(x_n + \lambda_2 h, y_n + \mu_{21} hK_1)\\
K_3 &= f(x_n + \lambda_3 h, y_n + \mu_{31} hK_1 + \mu_{32} hK_2)
\end{aligned}\right\} \tag{3-20}
$$

其中 c_1、c_2、c_3 及 λ_2、μ_{21}、λ_3、μ_{31}、μ_{32} 均为待定参数，当公式(3-20)的局部截断误差 $T_{n+1} = O(h^4)$时，可得到若干 3 阶 R-K 公式，其中常用的公式为

$$
\left.\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)\\
K_1 &= f(x_n, y_n)\\
K_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right)\\
K_3 &= f(x_n + h, y_n + hK_1 + 2hK_2)
\end{aligned}\right\}
$$

当 $r=4$ 时，常用的 4 阶龙格-库塔公式中最经典的一个为

$$
\left.\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)\\
K_1 &= f(x_n, y_n)\\
K_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right)\\
K_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2\right)\\
K_4 &= f(x_n + h, y_n + hK_3)
\end{aligned}\right\} \tag{3-21}
$$

四阶龙格-库塔方法的每一步需要计算 4 次函数值 f，可也证明其截断误差为 $O(h^5)$。

用 4 阶龙格-库塔方法求解初值问题(式(3-3))，并设步长 $h=0.2$，从 $x=0$ 直到 $x=1$，则经典的 4 阶龙格-库塔公式(3-21)具有形式

$$
\left.\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)\\
K_1 &= y_n - \frac{2x_n}{y_n}\\
K_2 &= y_n + \frac{h}{2}K_1 - \frac{2x_n + h}{y_n + \frac{h}{2}K_2}\\
K_3 &= y_n + \frac{h}{2}K_3 - \frac{2x_n + h}{y_n + \frac{h}{2}K_2}\\
K_4 &= y_n + hK_3 - \frac{2(x_n + h)}{y_n + hK_3}
\end{aligned}\right\}
$$

表 3-3 列出计算结果 y_n，表中 $y(x_n)$仍表示准确解。

表 3-3 计算结果

x_n	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_n	1.183 2	1.341 7	1.483 3	1.612 5	1.732 1
$y(x_n)$	1.183 2	1.341 6	1.483 2	1.612 5	1.732 1

比较例 3 和例 2 的计算结果,显然以龙格-库塔方法的精度为高。要注意,虽然 4 阶龙格-库塔方法的计算量(每一步要 4 次计算函数 f)比改进的欧拉方法(它是一种 2 阶龙格-库塔方法,每一步只要 2 次计算函数 f)大一倍,但由于这里放大了步长($h=0.2$),表 3-3 和表 3-2 所耗费的计算量几乎相同。这个例子再一次显示了选择算法的重要意义。

值得指出的是,龙格-库塔方法的推导基于泰勒展开方法,因而它要求所求的解具有较好的光滑性质。反之,如果解的光滑性差,那么使用 4 阶龙格-库塔方法求得的数值解,其精度可能反而不如改进的欧拉方法。实际计算时,应当针对问题的具体特点选择合适的算法。

(3)变步长的龙格-库塔方法

若只是从每一步看,步长越小,截断误差就越小。但随着步长的缩小,在一定求解范围内所要完成的步数就增加了,步数的增加不但引起计算量的增大,而且可能导致舍入误差的严重积累。因此,同积分的数值计算一样,微分方程的数值解法也有个选择步长的问题。在选择步长时,需要考虑两个问题:①怎样衡量和检验计算结果的精度;②如何依据所获得的精度处理步长。

3.1.4 线性多步法

在运用数值方法进行求解的过程中,计算 y_{n+1} 之前已经求出了一系列的近似值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$,若能充分利用前面多步的信息来预测 y_{n+1},则可望获得较高精度的近似解,这就是构造线性多步法的基本思想。

构造多步法的主要途径有利用数值积分方法和利用泰勒级数展开方法,前者可直接由方程(3-1)两端积分后利用插值求积公式得到。本节主要介绍基于泰勒展开的构造方法。

1.线性多步法的一般公式

如果计算 y_{n+k} 时,除用 y_{n+k-1} 的值,还用到 $y_{n+i}(i=0,1,\cdots,k-2)$ 的值,则称此方法为线性多步法。一般的线性多步法公式可表示为

$$y_{n+k}=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i y_{n+i}+h\sum_{i=0}^{k}\beta_i f_{n+i} \tag{3-22}$$

其中 y_{n+i} 为 $y(x_{n+i})$ 的近似,$f_{n+i}=f(x_{n+i},y_{n+i})$,$x_{n+i}=x_0+ih$,$\alpha_i$、$\beta_i$ 为常数,α_0 及 β_0 不全为零,则称式(3-22)为线性 k 步法。计算时需先给出前面 k 个近似值 $y_0,y_1,\cdots,y_{k-1}$,再由式(3-22)逐次求出 $y_k,y_{k+1},\cdots$。如果 $\beta_k=0$,称式(3-22)为显式 k 步法,这时 y_{n+k} 可直接由式(3-22)算出;如果 $\beta_k\neq 0$,则式(3-22)称为隐式 k 步法,求解时与梯形法(3-8)相同,要用迭代法方可算出 y_{n+k}。式(3-22)中系数 α_i 及 β_i 可根据方法的局部截断误差及阶确定。

定义 3.3 设 $y(x)$ 是初值问题(3-1)、(3-2)的准确解,线性多步法(3-22)在 x_{n+k} 上的局部截断误差为

$$T_{n+k}=L[y(x_n);h]=y(x_{n+k})-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i y(x_{n+i})-h\sum_{i=0}^{k}\beta_i y'(x_{n+i}) \tag{3-23}$$

若 $T_{n+k} = O(h^{p+1})$,则称式(3-22)是 p 阶的,若 $p \geq 1$ 则称式(3-22)与方程(3-1)是相容的。

可以证明多步法式(3-22)与微分方程(3-1)相容的充分必要条件是下式成立。

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1} = 1 \\ &\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha_i + \sum_{i=0}^{k} \beta_i = k \end{aligned}\right\} \tag{3-24}$$

显然,当 $k=1$ 时,若 $\beta_1 = 0$,则由式(3-24)可求得 $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 1$,此时公式(3-22)为 $y_{n+1} = y_n + hf_n$,即为欧拉法;若 $\beta_1 \neq 0$,此时公式(3-22)为隐式公式,得 $\alpha_0 = 1, \beta_0 = \beta_1 = 1/2$,进而得公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

即为梯形法。下面给出若干常用的多步法的具体公式。

2. 阿当姆斯显式与隐式公式

形如

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h\sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i} \tag{3-25}$$

的 k 步法,称为阿当姆斯(Adams)方法。$\beta_k = 0$ 为显式方法,$\beta_k \neq 0$ 为隐式方法,通常称为阿当姆斯显式公式与隐式公式。

当 $\beta_3 = 0$ 时,可以得到 $k=3$ 时的阿当姆斯显式公式

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n) \tag{3-26}$$

它是 3 阶方法,局部截断误差是 $T_{n+3} = \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_n) + O(h^5)$。

当 $\beta_3 \neq 0$ 时,可得 $k=3$ 时的阿当姆斯隐式公式

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n) \tag{3-27}$$

它是 4 阶方法,局部截断误差是 $T_{n+3} = -\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6)$。

表 3-4 与表 3-5 分别列出了 $k=1,2,3,4$ 时的阿当姆斯显式公式与阿当姆斯隐式公式,其中 k 为步数,p 为方法的阶,c_{p+1} 为误差常数。

表 3-4　阿当姆斯显式公式

k	p	公　式	c_{p+1}
1	1	$y_{n+1} = y_n + hf_n$	$\frac{1}{2}$
2	2	$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n-1} - f_n)$	$\frac{5}{12}$
3	3	$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$	$\frac{3}{8}$
4	4	$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n)$	$\frac{251}{720}$

表 3-5 阿当姆斯隐式公式

k	p	公 式	c_{p+1}
1	1	$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f_{n+1}+f_n)$	$-\frac{1}{12}$
2	2	$y_{n+2}=y_{n+1}+\frac{h}{12}(5f_{n+2}+8f_{n+1}-f_n)$	$-\frac{1}{24}$
3	3	$y_{n+3}=y_{n+2}+\frac{h}{24}(9f_{n+3}+19f_{n+2}-5f_{n+1}+f_n)$	$-\frac{19}{720}$
4	4	$y_{n+4}=y_{n+3}+\frac{h}{720}(251f_{n+4}+646f_{n+3}-264f_{n+2}+106f_{n+1}-19f_n)$	$-\frac{3}{160}$

3.米尔尼方法、辛普森方法及汉明方法

考虑与式(3-25)不同的另一个 $k=4$ 的显式公式

$$y_{n+4}=y_n+h(\beta_3f_{n+3}+\beta_2f_{n+2}+\beta_1f_{n+1}+\beta_0f_n)$$

其中 β_0、β_1、β_2、β_3 为待定常数,可根据使公式的阶尽可能高这一条件来确定其数值。学者米尔尼(Milne)得到如下公式:

$$y_{n+4}=y_n+\frac{4h}{3}(2f_{n+3}-f_{n+2}+2f_{n+1}) \tag{3-28}$$

称为米尔尼方法,该方法为 4 阶的,其局部截断误差

$$T_{n+4}=\frac{14}{45}h^5y^{(5)}(x_n)+O(h^6)$$

类似地,有一隐式二步 4 阶方法——辛普森(Simpson)方法,即

$$y_{n+2}=y_n+\frac{h}{3}(f_n+4f_{n+1}+f_{n+2}) \tag{3-29}$$

其局部截断误差

$$T_{n+2}=-\frac{h^5}{90}y^{(5)}(x_n)+O(h^6)$$

辛普森公式是二步方法中阶数最高的,但其稳定性较差,为改善稳定性,另有一类三步法公式,称之为汉明(Hamming)方法,即

$$y_{n+3}=\frac{1}{8}(9y_{n+2}-y_n)+\frac{3h}{8}(f_{n+3}+2f_{n+2}-f_{n+1}) \tag{3-30}$$

该方法是 4 阶的,且局部截断误差

$$T_{n+3}=-\frac{h^5}{40}y^{(5)}(x_n)+O(h^6)$$

4.预测—校正方法

对于隐式的线性多步法,计算时要进行迭代,计算量较大。为了避免进行迭代,通常采用显式公式给出 y_{n+k} 的一个初始近似值,记为 $y_{n+k}^{(0)}$,称为预测(predictor),接着计算 f_{n+k} 的值(evaluation),再用隐式公式计算 y_{n+k},称为校正(corrector)。例如在式(3-13)中用欧拉法做预测,再用梯形法校正,得到改进欧拉法,这就是一个 2 阶预测—校正方法。一般情况下,预测公式与校正公式都取同阶的显式方法与隐式方法。例如用 4 阶的阿当姆斯显式方法做预测,再用 4 阶阿当姆斯隐式公式做校正,得到以下格式。

预测(P)：

$$y_{n+4}^{p}=y_{n+3}+\frac{h}{24}(55f_{n+3}-59f_{n+2}+37f_{n+1}-9f_{n})$$

求值(E)：

$$y_{n+4}^{p}=f(x_{n+4},y_{n+4}^{p})$$

校正(C)：

$$y_{n+4}=y_{n+3}+\frac{h}{24}(9f_{n+4}^{p}+19f_{n+3}-5f_{n+2}+f_{n+1})$$

求值(E)：

$$f_{n+4}=f(x_{n+4},y_{n+4})$$

此公式称为阿当姆斯 4 阶预测—校正格式(PECE)。

为进一步减小误差还有一种修正预测—校正格式(PMECME)。

$$\text{P: } y_{n+4}^{p}=y_{n+3}+\frac{h}{24}(55f_{n+3}-59f_{n+2}+37f_{n+1}-9f_{n})$$

$$\text{M: } y_{n+4}^{pm}=y_{n+4}^{p}+\frac{251}{270}(y_{n+3}^{c}-y_{n+3}^{p})$$

$$\text{E: } f_{n+4}^{pm}=f(x_{n+4},y_{n+4}^{pm})$$

$$\text{C: } y_{n+4}^{c}=y_{n+3}+\frac{h}{24}(9f_{n+4}^{pm}+19f_{n+3}-5f_{n+2}+f_{n+1})$$

$$\text{M: } y_{n+4}=y_{n+4}^{c}-\frac{19}{270}(y_{n+4}^{c}-y_{n+4}^{p})$$

$$\text{E: } f_{n+4}=f(x_{n+4},y_{n+4})$$

同理可类似地建立 4 阶修正米尔尼-汉明预测—校正格式(PMECME)。

$$\text{P: } y_{n+4}^{p}=y_{n}+\frac{4}{3}h(2f_{n+3}-f_{n+2}+2f_{n+1})$$

$$\text{M: } y_{n+4}^{pm}=y_{n+4}^{p}+\frac{112}{121}(y_{n+3}^{c}-y_{n+3}^{p})$$

$$\text{E: } y_{n+4}^{pm}=f(x_{n+4},y_{n+4}^{pm})$$

$$\text{C: } y_{n+4}^{c}=\frac{1}{8}(y_{n+3}-y_{n+1})+\frac{3}{8}h(f_{n+4}^{pm}+2f_{n+3}-f_{n+2})$$

$$\text{M: } y_{n+4}=y_{n+4}^{c}-\frac{9}{121}(y_{n+4}^{c}-y_{n+4}^{p})$$

$$\text{E: } f_{n+4}=f(x_{n+4},y_{n+4})$$

3.1.5　方程组和高阶方程

1. 一阶方程组

前面讨论了单个方程 $y'=f$ 的数值解法，若把 y 和 f 视为向量，则所提供的各种计算公式皆可应用到一阶方程组的情形。

考察一阶方程组

$$y_i'=f_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_N),\ y_i(x_0)=y_i^0\qquad(i=1,2,\cdots,N)$$

若用向量的记号，记

$$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_N)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^0=(y_1^0,y_2^0,\cdots,y_N^0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_N)^{\mathrm{T}}$$

则上述初值问题可表示为

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\&\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0\end{aligned}\right\}\tag{3-31}$$

求解这一初值问题的4阶龙格-库塔公式为

$$\boldsymbol{y}_{n+1}=\boldsymbol{y}_n+\frac{h}{6}(\boldsymbol{k}_1+2\boldsymbol{k}_2+2\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)$$

式中

$$\boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{f}(x_n,\boldsymbol{y}_n),\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{f}\left(x_n+\frac{h}{2},\boldsymbol{y}_n+\frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1\right)$$

$$\boldsymbol{k}_3=\boldsymbol{f}\left(x_n+\frac{h}{2},\boldsymbol{y}_n+\frac{h}{2}\boldsymbol{k}_2\right),\boldsymbol{k}_4=\boldsymbol{f}(x_n+h,\boldsymbol{y}_n+h\boldsymbol{k}_3)$$

或表示为

$$y_{i,n+1}=y_{in}+\frac{h}{6}(K_{i1}+2K_{i2}+2K_{i3}+K_{i4})\qquad(i=1,2,\cdots,N)$$

其中

$$K_{i1}=f_i(x_n,y_{1n},y_{2n},\cdots,y_{Nn})$$

$$K_{i2}=f_i\left(x_n+\frac{h}{2},y_{1n}+\frac{h}{2}K_{11},y_{2n}+\frac{h}{2}K_{21},\cdots,y_{Nn}+\frac{h}{2}K_{N1}\right)$$

$$K_{i3}=f_i\left(x_n+\frac{h}{2},y_{1n}+\frac{h}{2}K_{12},y_{2n}+\frac{h}{2}K_{22},\cdots,y_{Nn}+\frac{h}{2}K_{N2}\right)$$

$$K_{i4}=f_i(x_n+h,y_{1n}+hK_{13},y_{2n}+hK_{23},\cdots,y_{Nn}+hK_{N3})$$

y_{in}为第i个因变量$y_i(x)$在节点$x_n=x_0+nh$的近似值。

为了便于理解,先分析两个方程的特殊情形:

$$\left.\begin{aligned}&y'=f(x,y,z)\\&z'=g(x,y,z)\\&y(x_0)=y_0\\&z(x_0)=z_0\end{aligned}\right\}$$

此时4阶龙格-库塔公式具有形式

$$\left.\begin{aligned}&y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)\\&z_{n+1}=z_n+\frac{h}{6}(L_1+2L_2+2L_3+L_4)\end{aligned}\right\}\tag{3-32}$$

其中

$$K_1=f(x_n,y_n,z_n),K_2=f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1,z_n+\frac{h}{2}L_1\right)$$

$$K_3=f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_2,z_n+\frac{h}{2}L_2\right),K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3,z_n+hL_3)$$

$$L_1=g(x_n,y_n,z_n),L_2=g\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1,z_h+\frac{h}{2}L_1\right)$$

$$L_3=g\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_2,z_n+\frac{h}{2}L_2\right),L_4=g(x_n+h,y_n+hK_3,z_n+hL_3)$$

这是一步法，利用节点 x_n 上的值 y_n、z_n，依次计算 K_1、L_1、K_2、L_2、K_3、L_3、K_4、L_4，然后代入式(3-32)即可求得节点 x_{n+1} 上 y_{n+1}、z_{n+1} 的值。

2.化高阶方程为一阶方程组

对于高阶微分方程(或方程组)的初值问题，原则上总可以归结为一阶方程组来求解。例如，考察下列 m 阶微分方程

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(m-1)}) \tag{3-33}$$

初始条件为

$$\left.\begin{aligned} & y(x_0) = y_0 \\ & y'(x_0) = y_0', \cdots, y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)} \end{aligned}\right\} \tag{3-34}$$

引入新的变量

$$y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_m = y^{(m-1)}$$

即可将 m 阶方程(3-33)化为如下的一阶方程组：

$$\left.\begin{aligned} & y_1' = y_2 \\ & y_2' = y_3 \\ & \vdots \\ & y_{m-1}' = y_m \\ & y_m' = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_m) \end{aligned}\right\} \tag{3-35}$$

初始条件式(3-34)则相应地化为

$$\left.\begin{aligned} & y_1(x_0) = y_0 \\ & y_2(x_0) = y_0' \\ & \vdots \\ & y_m(x_0) = y_0^{(m-1)} \end{aligned}\right\} \tag{3-36}$$

不难证明初值问题式(3-33)、(3-34)和式(3-35)、(3-36)是等价的。

特别地，对于下列二阶方程的初值问题：

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

引进新的变量 $z = y'$，即可化为下列一阶方程组的初值问题：

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = f(x, y, z) \\ y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = y_0' \end{cases}$$

针对这个问题应用4阶龙格-库塔公式(3-32)，有

$$\left.\begin{aligned} & y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ & z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) \end{aligned}\right\} \tag{3-37}$$

其中

$$K_1 = z_n, L_1 = f(x_n, y_n, z_n)$$

$$K_2 = z_n + \frac{h}{2}L_1, L_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1, z_n + \frac{h}{2}L_1\right)$$

$$K_3 = z_n + \frac{h}{2}L_2, L_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2, z_n + \frac{h}{2}L_2\right)$$

$$K_4 = z_n + hL_3, L_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3, z_n + hL_3)$$

若消去 K_1、K_2、K_3、K_4，则上述格式可表示为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hz_n + \dfrac{h^2}{6}(L_1 + L_2 + L_3) \\ z_{n+1} = z_n + \dfrac{h}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) \end{cases}$$

其中

$$L_1 = f(x_n, y_n, z_n), L_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}z_n, z_n + \frac{h}{2}L_1\right)$$

$$L_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}z_n, z_n + \frac{h}{2}L_2\right), L_4 = f(x_n + h, y_n + hz_n, z_n + hL_3)$$

3. 刚性方程组

在求解方程组(3-31)时，经常出现解的分量数量级差别很大的情形，这给数值求解带来很大困难，这种问题称为刚性(stiff)问题，在自动控制、化学反应及电子网络等领域中都是常见的。先考察以下经典的例子。

对一般的线性系统

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{g}(t) \tag{3-38}$$

其中 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_N)^T \in \mathbf{R}^N$，$\boldsymbol{g} = (g_1, \cdots, g_N)^T \in \mathbf{R}^N$，$\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{N\times N}$。若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ ($j = 1, \cdots, N$; $i = \sqrt{-1}$)，相应的特征向量为 $\boldsymbol{\varphi}_j$ ($j = 1, \cdots, N$)，则方程组(3-38)的通解为

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\lambda_j t}\boldsymbol{\varphi}_j + \boldsymbol{\Psi}(t) \tag{3-39}$$

其中 c_j 为任意常数，可由初始条件 $y(a) = y^0$ 确定，$\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为特解。假设 λ_j 的实部 $\alpha_j = \mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$，则当 $t \to \infty$ 时，$\boldsymbol{y}(t) \to \boldsymbol{\Psi}(t)$，$\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为稳态解。

定义 3.4 若线性系统式(3-38)中 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_j 满足条件 $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ ($j = 1, \cdots, N$)，且 $s = \max\limits_{1\le j\le N} |\mathrm{Re}(\lambda_j)| / \min\limits_{1\le j\le N} |\mathrm{Re}(\lambda_j)| \gg 1$，则称式(3-38)为刚性方程，称 s 为刚性比。

刚性比 $s \gg 1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 为病态矩阵，故刚性方程也称病态方程。通常 $s \geq 10$ 就认为是刚性的，s 越大病态越严重。

对一般非线性方程组(3-31)，将 f 在点 $(t, y(t))$ 处线性展开，其雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}(t) \in \mathbf{R}^{N\times N}$。若 $\boldsymbol{J}(t)$ 的特征值为 $\lambda_j(t)$ ($j = 1, \cdots, N$)，则当 $\lambda_j(t)$ 满足条件 $\mathrm{Re}(\lambda_j(t)) < 0$ ($j = 1, \cdots, N$)，且 $s(t) = \max\limits_{1\le j\le N} |\mathrm{Re}(\lambda_j(t))| / \min\limits_{1\le j\le N} |\mathrm{Re}(\lambda_j(t))| \gg 1$，则称系统方程(3-31)是刚性的，$s(t)$ 称为方程(3-31)的局部刚性比。

观察一个经典的刚性系统

$$\left.\begin{aligned} u' &= -1\,000.25u + 999.75v + 0.5 \\ v' &= 999.75u - 1\,000.25v + 0.5 \\ u(0) &= 1 \\ v(0) &= -1 \end{aligned}\right\} \tag{3-40}$$

它可用解析方法求出准确解为

$$\begin{cases} u(t) = -e^{-0.5t} + e^{-2\,000t} + 1 \\ v(t) = -e^{-0.5t} - e^{-2\,000t} + 1 \end{cases}$$

方程右端系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1\,000.25 & 999.75 \\ 999.75 & -1\,000.25 \end{bmatrix}$，其特征值为 $\lambda_1 = -0.5 < 0, \lambda_2 = -2\,000 < 0$，刚性比 $s = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} = 4\,000 \gg 1$，所以式(3-40)为刚性方程。

当 $t \to \infty$ 时，$u(t) \to 1, v(t) \to 1$，称为稳态解，可以认为 $e^{-10} \approx 0$，则 u、v 中的快变分量 $e^{-2\,000t}$ 及慢变分量 $e^{-0.5t}$ 趋于零的速度是不同的。

对应于 λ_2 的快速衰减的分量在 $t = 0.00$ s 时已衰减到 $e^{-10} \approx 0$，称 $\tau_2 = -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{2\,000} = 0.000\,5$ 为时间常数；当 $t = 10\tau_2$ 时快变分量即可被忽略。对应于 λ_1 的慢变分量，它的时间常数 $\tau_1 = -\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{0.5} = 2$，它要计算到 $t = 10\tau_1 = 20$ 时，才能衰减到 $e^{-10} \approx 0$，也就是说解 u、v 必须计算到 $t = 20$ 才能达到稳态解。

若用 4 阶龙格-库塔法求解，步长选取要满足 $h < -2.78/\lambda$，即 $h < 0.001\,39$，才能使计算稳定。而要计算到稳态解至少需要算到 $t = 20$，则需计算 14 388 步。这种用小步长计算长区间的现象是刚性方程组数值求解出现的困难，它是系统本身病态性质引起的。

求刚性方程数值解时，若用步长受限制的方法就将出现小步长计算大区间的问题，因此最好使用对步长 h 不加限制的方法，前面所介绍的方法中能用于解刚性方程的方法很少。通常求解刚性方程的高阶线性多步法是吉尔(Gear)方法，还有隐式龙格-库塔法，这些方法都有相应的数学软件可供使用。

3.2 数值计算软件及应用

本节主要介绍常用的数值计算软件 Matlab 与 Mathematica。

3.2.1 Matlab 概述

1. Matlab 的概况及发展

20 世纪 70 年代，Cleve Moler 博士和其同事，利用业余时间为学生编写 EISPACK 和 LINPACK 的接口程序。Cleve Moler 给这个接口程序取名为 Matlab，该名为矩阵(matrix)和实验室(labotatory)两个英文单词的前三个字母的组合。在以后的数年里，Matlab 在多所大学里作为教学辅助软件使用，并作为面向大众的免费软件广为流传。

80 年代，Cleve Moler 和 John Little 成立了 Math Works 公司，正式把 Matlab 推向市场，并继续进行 Matlab 的研究和开发。

美国 MathWorks 公司自 1984 年将 Matlab 推向市场以来，先后发布了多个版本，1993 年发布 4.0 版，1996 年发布 5.0 版，1999 年发布 5.3 版。2001 年发布 6.1 版(R12)。2002 年发布 6.5 版(R13)。2004 年发布了 7.0 版(R14)。

在 Matlab 进入市场前，国际上的许多软件包都是直接以 FORTRAN、C 等编程语言开发的。这种软件的缺点是使用面窄，接口简陋，程序结构不开放以及没有标准的基库，很难适应各学科的最新发展，因而很难推广。Matlab 的出现，为各国科学家开发专业软件提供了新的基础。

时至今日，经过 Math Works 公司的不断完善，Matlab 已经发展成为适合多学科、多种工作平台的功能强大的大型软件。在国外，Matlab 已经经受了多年考验。在欧美等国家的高校，Matlab 已经成为线性代数、自动控制理论、数理统计、数字信号处理、时间序列分析、动态系统仿真等高级课程的基本教学工具，成为攻读学位的本科生、硕士研究生、博士研究生必须掌握的基础软件。在设计研究单位和工业部门，Matlab 被广泛用于科学研究和解决各种具体问题。在国内，特别是工程界，Matlab 一定会盛行起来。可以说，无论从事工程方面的哪个学科的相关工作，都能在 Matlab 里找到合适的功能。

2. Matlab 语言的特点

一种语言之所以能如此迅速地普及，显示出如此旺盛的生命力，是由于它有着不同于其他语言的特点。正如同 FORTRAN 和 C 等高级语言使人们摆脱了需要直接对计算机硬件资源进行操作一样，被称为第四代计算机语言的 Matlab，利用其丰富的函数资源，使编程人员从繁琐的程序代码中解放出来。Matlab 最突出的特点就是简洁。Matlab 用更直观的，符合人们思维习惯的代码，代替了 C 和 FORTRAN 语言的冗长代码。Matlab 给用户带来的是最直观、最简洁的程序开发环境。以下简单介绍一下 Matlab 的主要特点。

①强大的数值运算功能。在 Matlab 环境中，有超过 500 种数学、统计、科学及工程方面的函数可供使用，函数的标示自然，使得问题和解答像数学式子一般简单明了，让使用者可将精力全发挥在解题方面，而非浪费在电脑操作上。

②运算符丰富。由于 Matlab 是用 C 语言编写的，Matlab 提供了和 C 语言几乎一样多的运算符，灵活使用 Matlab 的运算符将使程序变得极为简短。

③Matlab 既具有结构化的控制语句(如 for 循环，while 循环，break 语句和 if 语句)，又有面向对象编程的特性。

④高级但简单的程序环境。作为一种直译式的程式语言，Matlab 容许使用者在短时间内写完程序，所花的时间约为用 FORTRAN 或 C 的几分之一，而且不需要编译(compile)及链接(link)即能执行，同时包含了更多及更容易使用的内建功能。

⑤先进的资料视觉化功能。Matlab 的物件导向图形架构让使用者可执行视觉数据分类，并制作高品质的图形，完成科学性或工程性图文并茂的文章。

⑥丰富的程序工具箱。Matlab 的程序工具箱融合了套装前软件的优点，具有灵活开放与容易操作的环境，这些工具箱提供了使用者在特别应用领域所需的许多函数。现有工具箱有：符号运算(利用 Maple V 的计算核心执行)、影像处理、统计分析、信号处理、神经网路、模拟分析、控制系统、即时控制、系统确认、强建控制、弧线分析、最佳化、模糊逻辑、mu 分析及合成、化学计量分析。

⑦开放及可延伸的架构。Matlab 容许使用者接触它大多数的数学原始码，检视运算法，更改现存函数，甚至加入使用者自己的函数使其成为使用者所需要的环境。

⑧功能强大的SIMULINK仿真环境。SIMULINK是一个进行动态系统建模、仿真和综合分析的集成软件包。它可以处理的系统包括:线性、非线性系统,离散、连续及混合系统,单任务、多任务离散事件系统。在SIMULINK提供的图形用户界面(GUI)上,只要进行鼠标的简单拖拉操作就可构造出复杂的仿真模型。它外表以方块图的形式呈现,且采用分层结构。从建模角度讲,这既适于自上而下(Top-down)的设计流程(概念、功能、系统、子系统、直至器件),又适于自下而上(Buttom-up)逆程设计。从分析研究角度讲,这种SIMULINK模型不仅能让用户知道具体环节的动态细节,而且能让用户清晰地了解各器件、各子系统、各系统间的信息交换,掌握各部分之间的交互影响。

3.2.2 Mathematica概述

Mathematica是集数值计算、符号推导、图形处理与程序开发于一身的大型综合性计算机代数系统。它与Matlab已成为当今世界上最流行的两大主流数学软件。Mathematica因其强大的符号推导与二次开发功能而为广大数学、力学、计算机科学及其他多门学科的学者们所推崇。

Mathematica是美国Wolfram Research公司开发的数学软件。它的主要使用者是从事理论研究的数学工作者、其他科学工作者以及从事实际工作的工程技术人员。Mathematica可以用于解决各种领域的涉及复杂的符号计算和数值计算的问题,能够代替许多以前只能靠纸和笔解决的工作。这种思维和解题工具的革新可能对各种研究领域和工程领域产生深远的影响。

Mathematica可以做许多符号演算工作,如进行多项式的计算、因式分解、展开等;进行各种有理式计算,求多项式、有理式方程和超越方程的精确解和近似解;进行数值的或一般代数式的向量、矩阵的各种计算;求极限、导数、积分,幂级数展开,求解某些微分方程等。Mathematica还可以作任意位数的整数或分子、分母为任意大整数的有理数的精确计算,作具有任意位精度的数值(实、复数值)的计算。所有Mathematica系统内部定义的整函数、实(复)函数也具有这样的性质。使用Mathematica可以很方便地画出用各种方式表示的一元和二元函数的图形。通过这样的图形,使用者可以立即形象地把握住函数的某些特性,而这些特征一般很难从函数的符号表达式中看清楚。

Mathematica的能力不仅仅在于以上描述的这些功能,更重要的在于把这些功能有机地结合在一个系统里。在使用这个系统时,人们可以根据自己的需要,时而从符号演算转为画图形,时而又转为做数值计算。这种灵活性能带来极大的方便,常使一些看起来非常复杂的问题变得很简单。Mathematica还是一个很容易扩充和修改的系统,它提供了一套描述方法,相当于一个编程语言,用这个语言可以写程序,解决各种特殊问题。

1.Mathematica的启动与退出

Mathematica作为具有Windows界面的高级应用软件,其操作过程与绝大多数的应用系统是类似的。

进入系统的方式有:

①打开执行文件(开始→程序→Mathematica 4或3);

②双击桌面上系统图标。

退出系统的方式有:

①直接使用工具关闭按钮;

②菜单File→Exit。

系统界面中的菜单栏中有：File，Edit，Cell，Format，Input，Kernel，Windows，Help，共 8 项。

其中的 Cell、Format 为对用户所写的单元（相对独立的一次输入，即输入界面的右端蓝色边线限定的小段）进行设置与管理；Input 中的选项可以对单元的建立与运行设置某些特定的任务与效果；Kernel 是对系统的核进行设定（不宜轻易改动）；File、Edit、Windows、Help 的功能与常见的软件系统相同。

2. Mathematica 编程简介

下面简要介绍 Mathematica 中的编程以及与编程相关的一些知识。使用纯函数、模式匹配等编程方法应当成为一种好的习惯，在具体的问题上应优先考虑 Mathematica 提供的高级编程方法。实现计算 $n!$，可以有各种途径，Mathematica 系统帮助中提供的计算整数阶乘的例子如下。

```
f = Factorial
f[n_]: = n!
f[n_]: = Gamma[n - 1]
f[n_]: = nf[n - 1];f[1] = 1
f[n_]: = Product[i, {i,n}]
f[n_]: = Module[{t = 1},Do[t = t * i, {i,n}];t]
f[n_]: = Module[{t = 1,i},For[i = 1,i<=n,i+ + ,t* = i];t]
f[n_]: = Apply[Times,Range[n]]
f[n_]: = Fold[Times,1,Range[n]]
f[n_]: = If[n = 1,1,nf[n - 1]]
f = If[ #1 = 1,1, #1 #0[ #1 - 1]]&
f[n_]: = Fold[ #2[ #1]&,1,Array[Function[t, #t]&,n]]
```

这是在 Mathematica 中用 12 种不同方法实现阶乘计算程序的简单例子，充分体现了它的编程的风格和灵活性。因此使用者应当侧重于学习 Mathematica 高效的编程方法，用它来解决复杂的实际问题。

第 4 章　赤潮非线性动力学

赤潮的发生机制至今仍未明了。本章运用非线性动力学理论研究了单种群赤潮藻类、多种群赤潮藻类以及赤潮食物链的生态动力学行为，阐明了模型的非线性动力学特性，提出了赤潮发生的生态动力学机制。

4.1　单种群赤潮藻类的非线性动力学

本节以渤海赤潮代表性藻类——中肋骨条藻为研究对象，主要考虑影响藻类生长的理化因子氮和磷对藻类生长的影响，同时对各环境因子进行关联和模型合理简化，建立了多自由度非线性动力学模型。在此基础上，运用现代非线性力学的分岔理论对模型进行理论求解和讨论。根据分析结果，较为明确地提出了影响藻类生长的限制性因子，并根据文献值对模型进行了仿真。

4.1.1　模型的建立

引发赤潮的生物在世界范围内约有 80 多个种属，除细菌和原生动物缢虫外，其余均为藻类。而在我国沿海海域的赤潮生物约 30 多个种属，不同季节和海域引发赤潮的藻类种属也不同，其中以甲藻和硅藻居多。以下选取具有代表性的硅藻——中肋骨条藻为例，研究其生长规律与营养盐之间的关系。

基于有连续培养基的培养室内微生物的连续培养模式，以及封闭环境中赤潮发生过程的生态动力学模型，本章对发生中肋骨条藻赤潮的主要环境因子氮和磷对生态动力学模型的影响进行了研究，并认为氮和磷两种营养盐对藻类生长的限制是互相独立的，即

$$\mu_{\max} = \mu_{\max,N} \cdot \mu_{\max,P} \tag{4-1}$$

根据微生物生长的底物消耗抑制动力学模型方程，得到氮和磷限制的营养动力学模型如下：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= r_1[-(r+l_1)A + \mu_{\max} g(N)g(P)A] \\
\frac{dN}{dt} &= r_2[l_2(N_0 - N) - \omega_1 \mu_{\max} g(N)g(p)A + \varepsilon_1 A] \\
\frac{dP}{dt} &= r_3[l_3(P_0 - P) - \omega_2 \mu_{\max} g(P)g(N)A + \varepsilon_2 A]
\end{aligned}\right\} \tag{4-2}$$

其中，营养增长函数符合 Monod 方程

$$\left.\begin{aligned}
g(N) &= \frac{N}{K_N + N} \\
g(P) &= \frac{P}{K_P + P}
\end{aligned}\right\} \tag{4-3}$$

式中：A 代表 t 时刻藻类的密度；N、P 分别代表 t 时刻可溶性无机氮和可溶性无机磷的浓度；N_0、P_0 代表氮、磷的初始浓度；r_1、r_2、r_3 分别代表藻类、氮和磷的相对增长比率；l_1、l_2、l_3 为藻

类、氮和磷的环境损耗率；r 为藻类的死亡率；ε_1 和 ε_2 分别代表藻类代谢分解及其他生物代谢对氮、磷浓度增长的贡献率(同比浓度下)；ω_1、ω_2 代表藻类生长对氮、磷的吸收比率；μ_{max} 为藻类的最大生长速率；K_N、K_P 分别代表藻类生长对氮和磷的半饱和常数。

4.1.2 模型的分析与求解

根据模型方程的基本特征，注意到分式展开后出现的关于氮和磷的高次非线性项，运用现代非线性动力学理论中的中心流形定理来判断方程解的稳定性。

首先，求方程的平衡点。方程(4-2)可以简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dA}{dt}&=\alpha_1A+\beta_1g(N)g(P)A\\\frac{dN}{dt}&=\alpha_2(N_0-N)-\beta_2g(N)g(P)A+\eta_1A\\\frac{dP}{dt}&=\alpha_3(P_0-P)-\beta_3g(N)g(P)A+\eta_2A\end{aligned}\right\}\tag{4-4}$$

其中

$$\alpha_1=-r_1(r+l_1),\quad \alpha_2=r_2l_2,\quad \alpha_3=r_3l_3,\quad \beta_1=r_1\mu_{max},\quad \beta_2=r_2\omega_1\mu_{max}$$

$$\beta_3=r_3\omega_2\mu_{max},\quad \eta_1=r_2\varepsilon_1,\quad \eta_2=r_2\varepsilon_2$$

参考相关文献，选取以下参数：

$$r_1=13,\quad r_2=2.8,\quad r_3=0.8,\quad l_1=0.975,\quad l_2=0.4,\quad l_3=0.1,\quad r=0.9$$

$$\mu_{max}=3.0,\quad K_N=4.0,\quad K_P=0.54,\quad \varepsilon_1=2.1,\quad \varepsilon_2=0.28,\quad \omega_1=1.2,\quad \omega_2=0.20$$

令方程(4-4)式右端为零，则

①$A=0$ 时，易得平衡点为$(0,N_0,P_0)$，即初始状态；

②$A\neq0$ 时，此即为 t 时刻藻类的浓度不为零，令 $N/P=k$，求出平衡点

$$X^*=(A^*,N^*,P^*)$$

进行如下线性变换：

$$\begin{cases}x=A-A^*\\y=N-N^*\\z=P-P^*\end{cases}$$

将上式带入微分方程(4-4)，同时将 $g(N)$、$g(P)$进行泰勒展开，分离线性项和高次项得

$$\boldsymbol{\theta}'=\boldsymbol{K\theta}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta})\tag{4-5}$$

其中 $\boldsymbol{\theta}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{K}$ 为线性项系数矩阵，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta})$为高次项。

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta})=(f_1(\boldsymbol{\theta}),f_2(\boldsymbol{\theta}),f_3(\boldsymbol{\theta}))^{\mathrm{T}}$$

其中

$$\begin{aligned}f_1(\boldsymbol{\theta})=&\frac{-\beta_1K_NA^*P^*}{(K_N+N^*)^3(K_P+P^*)}y^2+\frac{\beta_1K_NA^*P^*}{(K_N+N^*)^2(K_P+P^*)}xy\\&+\frac{\beta_1K_NA^*P^*}{(K_N+N^*)(K_P+P^*)}xz+\frac{-\beta_1K_NK_PA^*}{(K_N+N^*)^2(K_P+P^*)^2}yz\\&+\frac{-\beta_1K_PA^*N^*}{(K_N+N^*)(K_P+P^*)^2}z^2+\mathrm{h.o.t.}\end{aligned}$$

$$f_2(\theta)=\frac{-\beta_2K_NA^*}{(K_N+N^*)^3}y^2-\frac{\beta_2K_N}{(K_N+N^*)^2}xy-\frac{\beta_2K_NA^*}{(K_N+N^*)^4}y^3+\frac{\beta_2K_N}{(K_N+N^*)^3}xy^2+\text{h.o.t.}$$

$$f_3(\theta)=-\frac{\beta_3K_PA^*}{(K_P+P^*)^3}z^2-\frac{\beta_3K_P}{(K_P+P^*)^2}xz-\frac{\beta_3K_PA^*}{(K_P+P^*)^4}z^3+\frac{\beta_3K_PA^*}{(K_P+P^*)^3}xz^2+\text{h.o.t.}$$

平衡点处的 Jaccobi 矩阵为

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}0 & s_1 & s_2\\ t_1 & -s_1-\alpha_2 & -s_2\\ t_2 & -s_1 & -s_2-\alpha_3\end{bmatrix}$$

其中

$$s_1=\frac{-\alpha_1K_NA^*}{N^*(K_N+N^*)},\quad s_2=\frac{-\alpha_1K_PA^*}{N^*(K_P+P^*)},\quad t_1=\frac{\eta_1\beta_1+\beta_2\alpha_1}{\beta_1},\quad t_2=\frac{\eta_2\beta_1+\beta_3\alpha_1}{\beta_1}$$

计算 $\boldsymbol{K}$ 的特征值，令 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K}|=0$，解得

$$\lambda_1=s_2+\frac{s_1t_1\alpha_3}{\alpha_2t_2},\quad \lambda_2=t_1,\quad \lambda_3=\frac{\alpha_2t_2}{t_1}$$

易知 λ_2、$\lambda_3\neq0$，故令 $\lambda_1=0$。其对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\zeta}_1=\begin{pmatrix}1 & \frac{t_1}{\alpha_2} & \frac{\alpha_2}{t_2}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\zeta}_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{t_2-t_1}{t_1+\alpha_3}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\zeta}_3=\begin{pmatrix}1 & \frac{t_1^2-\alpha_2t_2}{\alpha_2t_1-\alpha_2t_2} & \frac{t_1t_2-\alpha_2t_2}{\alpha_3t_1-\alpha_2t_2}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

由特征向量求取的线性变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \frac{t_1}{\alpha_2} & 0 & \frac{t_1^2-\alpha_2t_2}{\alpha_2t_1-\alpha_2t_2}\\ \frac{\alpha_3}{t_2} & \frac{t_2-t_1}{t_1+\alpha_3} & \frac{t_1t_2-\alpha_2t_2}{\alpha_3t_1+\alpha_2t_2}\end{bmatrix}$$

代入参数得

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3.063 & 0 & 2.767\\ -0.0697 & -1.154 & 2.622\end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}-0.3728 & 0.4408 & -0.3230\\ 0.9601 & -0.3142 & -0.0346\\ 0.4127 & -0.1266 & 0.3576\end{bmatrix}$$

作线性变换

$$(x,y,z)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}(u,v,w)^{\mathrm{T}}$$

则原来的微分方程式(4-5)可以化为

$$\phi'=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{T}^{-1}f(\boldsymbol{T}\boldsymbol{\phi}) \tag{4-6}$$

其中

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & t_1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2t_2}{t_1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\phi}=\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}$$

把各参数代人式(4-6),得

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2 t_2}{t_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.372\,8f_1(T\Phi) + 0.440\,8f_2(T\Phi) - 0.323\,0f_3(T\Phi) \\ 0.960\,1f_1(T\Phi) - 0.314\,2f_2(T\Phi) - 0.034\,6f_3(T\Phi) \\ 0.412\,7f_1(T\Phi) - 0.126\,6f_2(T\Phi) + 0.357\,6f_3(T\Phi) \end{bmatrix} \tag{4-7}$$

由中心流形定理,设

$$\begin{cases} v = b_2 u^2 + b_3 u^3 + b_4 u^4 + \cdots \\ w = c_2 u^2 + c_3 u^3 + c_4 u^4 + \cdots \end{cases}$$

将上式代入方程(4-7),比较等式两端同次幂的系数后得

$$b_2 = 0, \quad b_3 = 0.500\alpha_2\alpha_3, \quad b_4 = 0.125t_1\alpha_1\alpha_2 + 0.416\,7\alpha_2^2\alpha_3 t_2/t_1$$

$$c_2 = 0.500\alpha_3, \quad c_3 = 0.166\,7\alpha_2\alpha_3 t_2/t_1$$

$$c_4 = 0.251 \times \left[\frac{\alpha_2^2 t_2^2 \alpha_3}{t_1^2} + \frac{\beta_3\alpha_3 K_P}{(K_P + P^*)^2} - \frac{\alpha_3\beta_3(t_1 - t_2)K_P A^* P^*}{(K_N + N^*)(K_P + P^*)^2}\right]$$

精确到三次方的中心流形的展开式为

$$W^c = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500\alpha_2\alpha_3 u^3 + O(u^4) \\ -0.500\alpha_3 u^2 - \frac{0.166\,7\alpha_2\alpha_3 t_2}{t_1} u^3 + O(u^4) \end{pmatrix} \right.$$

代入式(4-7)得中心流形上流的方程

$$u' = -\left[0.243\,0 \times \left(1 - \frac{\beta_2 t_1}{\beta_1\alpha_2 t_2} + \frac{1}{\alpha_2}\right)\frac{\beta_1 A^* N^*}{K_N + N^*} + \frac{0.251\,4\beta_3 t_1}{\alpha_2 t_2}\right]\frac{\alpha_3 K_P s_1}{(K_P + P^*)^2} u^3 + O(u^4)$$

令 u^3 的系数为 C,则 C 的符号取决于

$$m = 0.243\,01 \times \left(1 - \frac{\beta_2 t_1}{\beta_1\alpha_2 t_2} + \frac{1}{\alpha_2}\right)\frac{\beta_1 A^* N^*}{K_N + N^*} + \frac{0.251\,4\beta_3 t_1}{\alpha_2 t_2}$$

代入各参数,得

$$m = \frac{10.086k^2 - 168.554k - 0.076\,0}{(1.12k + 0.239\,0)(30.957k + 0.956)}$$

由分岔理论知,当系统发生分岔时,有 $m = 0$。此时求得

$$k_1 \approx 0, k_2 = 16.71$$

4.1.3　结果与讨论

由于 $R = N/P$,当 $k = 0$ 时,$N = 0$,即表示海水中不含营养盐氮,而这在实际中很难出现,因此当 $k = 0$ 时无实际意义,下面就 $k = 16.71$ 展开讨论。

①当 $k = 16.71$ 时,$P^* = 1.382, N^* = 23.096, A^* = 32.36$。海洋学家认为,大洋中的无机氮和磷的比为 16:1(Redfield 比值)。一般认为,比值过高或过低都会影响藻类的生长。另外由此计算出的引发藻类急剧繁殖的限制性营养盐磷的浓度与林昱等实验研究得出的引发中肋骨条藻的 DIP 值应大于 1.2 μmol/L 也较为一致。

②当 $k > 16.71$ 时,$C < 0$,系统趋于稳定。此时,磷处于相对缺乏状态,为限制性环境因子。因此藻类生长速率较慢,死亡率和环境损耗率大于生长速率,藻类浓度减小,甚至趋于消

亡。

③当 $1 < k < 16.71$ 时，$C > 0$，系统不稳定。此时，限制性因子磷相对充足，使得藻类繁殖增快，浓度迅速增加，从而形成一次赤潮。Redfield 等认为，在海洋中，任何氮的缺乏都可以有来自于浮游生物的固氮作用所弥补，而磷的补充则只受物理因素的影响，恢复相对较慢。因而磷在很大意义上是海水中藻类生长的限制性营养盐。

④当 $\lambda_1 = 0$ 时，可以得出 $k = 16.2$，即为模型方程的解产生分岔时 k 的取值。这与模型的最终分析结果基本一致。

为了检验理论结果，根据所选模型参数值在计算机上用 Matlab 进行了仿真，下面给出仿真结果。图 4-1、图 4-2 和图 4-3 是藻类、氮和磷的浓度随时间变化图。

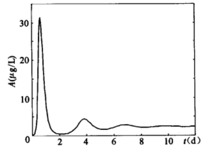


图 4-1　藻类浓度随时间变化曲线

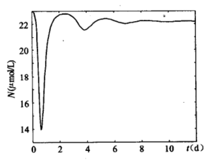


图 4-2　氮浓度随时间变化的曲线

由于环境因素以及藻类本身生理特性的限制，藻类的生长表现出渐近的周期性。当周围环境适宜时，一定种群密度的藻类开始迅速生长，同时消耗周围环境的营养物质。当藻类的密度大于一定的值时，形成第一次赤潮。而当藻类密度第一次达到峰值(此时赤潮的影响最为严重)时，藻类对周围环境的利用达到极限。随后，由于营养盐限制(由图易知，同时期的氮和磷浓度降低到较低值)藻类的浓度开始急剧下降，直到很低的水平。由于藻类密度的急剧降低，藻类代谢和死亡藻类的降解，以及洋流的扩散作用，营养盐的浓度逐渐恢复。藻类在此条件下又进入急剧增长期，从而形成第二次赤潮(第二次峰值的出现)。因为营养盐的浓度比第一次时小，所以藻类浓度的峰值较第一次小。随后，藻类浓度随时间继续振荡，最后趋于平衡，见图 4-1。

由图 4-2 和图 4-3 可知，营养盐氮和磷的浓度随时间变化亦呈周期变化，经几度振荡后趋于恒定值，而且峰值呈衰减趋势。比较图 4-2 和图 4-3 可知，磷的浓度在经过几次周期振荡后趋于极低的水平，而氮的浓度经过几次周期振荡后趋于初始的水平。这反映了磷在赤潮的发生过程中是限制性营养盐，其浓度水平直接影响赤潮的发生过程。比较图 4-1、图 4-2、图 4-3 可知，当藻类的浓度最大时，氮和磷的浓度也逐渐降到最低值，但有一定的延迟。

图 4-4、图 4-5 和图 4-6 分别表示出了藻类浓度与氮浓度、藻类浓度与磷浓度以及氮的浓度和磷的浓度的时间历程图，图中的曲线皆收敛于一点。图 4-6 表征了赤潮发生过程中氮和磷的浓度变化。由图易知，氮的浓度经过几次周期振荡后能基本恢复到初始水平，而磷的浓度在几次周期振荡后趋于较低的水平。稳定点处的氮磷比值接近于 16:1，仿真结果和实际非常接近。

本节利用生物生长机理，主要考虑了赤潮发生过程中关键的环境因子氮和磷及其之间的

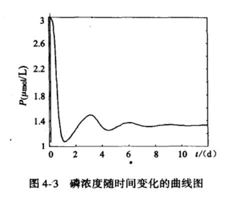


图 4-3 磷浓度随时间变化的曲线图

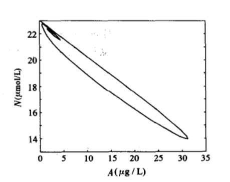


图 4-4 藻类浓度与氮浓度时间历程图

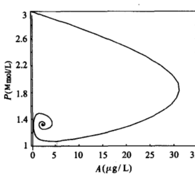


图 4-5 藻类浓度与磷的浓度时间历程图

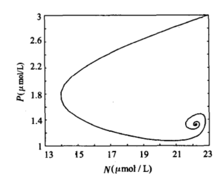


图 4-6 氮的浓度与磷的浓度的时间历程图

耦合和底物反馈机制，建立了代表赤潮藻类生长的新的非线性生态动力学模型，并在此基础上对模型方程可能的分岔行为进行了分析和讨论。分析表明在藻类生长过程中营养盐对藻类起着重要作用，在忽略其他物理因素的影响下，磷的浓度对藻类的生长影响最大，为限制性因子。同时，模型的分析结果和有关文献的实验结果基本一致。对模型进行仿真的结果也表明，模拟结果与赤潮的实际发生过程基本一致，理论分析结果与仿真结果是吻合的。

4.2 多种群赤潮藻类的非线性动力学

4.2.1 *E-S-N* 模型的非线性动力学分析

本节内容依据相关文献资料，通过分析多种群赤潮生态动力学模型，根据种群食物链的营养物质增加—浮游植物(硅藻)大量繁殖—夜光藻的迅速繁殖—发生赤潮的反馈机制，建立反映各种生态要素的多参数模型。选取主要影响参数作为控制变量，对模型方程解的稳定性进行了深入的研究。

1.多种群赤潮食物链模型

根据夜光藻赤潮发生时形成的营养物质—硅藻—夜光藻这样一个简单的食物链，利用多种群生态学原理，建立夜光藻营养动力学模型：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}&=rc_1(E_0-E)-\frac{raES}{E_m+E}\\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}&=-(\gamma+c_2)S+\frac{\varepsilon_1 aES}{E_m+E}-b(1-\mathrm{e}^{-\beta S})N\\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}&=-(\delta+c_3)N+\varepsilon_2 b(1-\mathrm{e}^{-\beta S})N\end{aligned}\right\}\tag{4-8}$$

式中，$E=E(t)$、$S=S(t)$、$N=N(t)$分别为随时间变化的营养物质浓度、硅藻密度、夜光藻密度；E_0 为定量输入的营养物质浓度；E_m 为营养物质浓度增长的半饱和参数；c_1、c_2、c_3 分别为营养物质、硅藻、夜光藻的环境损耗率；r 为营养物质的相对增长比例；a、b 和 γ、δ 分别为硅藻、夜光藻的增长率和死亡率；ε_1、ε_2 分别为硅藻、夜光藻的吸收营养转换率，且 $0<\varepsilon_1$、$\varepsilon_2<1$；β 为硅藻增长的饱和率水平。

2. **系统模型的稳定性分析**

根据模型方程的基本特征，注意到食物链模型中各元素的物理意义及在实际发生过程中相互影响、耦合，考虑用 Lyapunov 运动稳定性的判定条件及其相关稳定理论来判断模型方程的稳定性。

首先求方程的平衡点，令方程(4-8)的左端为零，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}&=0\\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}&=0\\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}&=0\end{aligned}\right\}\tag{4-9}$$

解方程(4-9)得模型方程的平衡点 $Q(E^*,S^*,N^*)$。作坐标平移，令

$$\begin{cases}u=E-E^*\\ v=S-S^*\\ w=N-N^*\end{cases}$$

则方程(4-8)可化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}&=rc_1(E_0-E^*-u)-\frac{ra(u+E^*)(v+S^*)}{E_m+u+E^*}\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}&=-(\gamma+c_2)(v+S^*)+\frac{\varepsilon_1 a(u+E^*)(v+S^*)}{E_m+u+E^*}-b(1-\mathrm{e}^{-\beta(v+S^*)})(w+N^*)\\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}&=-(\delta+c_3)(w+N^*)+\varepsilon_2 b(1-\mathrm{e}^{-\beta(v+S^*)})(w+N^*)\end{aligned}\right\}\tag{4-10}$$

进而可得模型方程(4-8)的线性部分的 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} rc_1+\dfrac{raS^*E_m}{(E_m+E^*)^2} & \dfrac{-raE^*}{E_m+E^*} & 0\\ \dfrac{\varepsilon_1 aS^*E_m}{(E_m+E^*)^2} & -(\gamma+c_2)+\dfrac{\varepsilon_1 aE^*}{E_m+E^*}-\beta bN^*\mathrm{e}^{-\beta S^*} & b(1-\mathrm{e}^{-\beta S^*})\\ 0 & \varepsilon_2\beta bN^*\mathrm{e}^{-\beta S^*} & -(\delta+c_3)+\varepsilon_2 b(1-\mathrm{e}^{-\beta S^*}) \end{bmatrix}$$

根据 Lypunov 运动稳定性条件和有关稳定性理论，模型方程的局部稳定性取决于 Jacobi 矩

阵 K 的特征值。对于三维模型方程,其平衡点应当有 8 种情况。对于所讨论的模型方程,考虑到具体实际情况,仅有 3 种情况有具体意义,即 $Q_1(E_0,0,0)$、$Q_2(E_1,S_1,0)$和 $Q_3(E^*,S^*,N^*)$。下面讨论在各种稳态下系统的局部稳定性。

①对于平衡态 $Q_1(E_0,0,0)$,物理意义是理想化的初始水平,即硅藻和夜光藻的种群密度均为零,此时的 Jacobi 矩阵为

$$K=\begin{bmatrix} -rc_1 & \dfrac{-raE_0}{E_m+E_0} & 0 \\ 0 & -(\gamma+c_2)+\dfrac{\varepsilon_1 aE_0}{E_m+E_0} & 0 \\ 0 & 0 & -(\delta+c_3) \end{bmatrix}$$

Jacobi 矩阵为上三角矩阵,其三个特征值分别为:$-rc_1$、φ 和 $-(\delta+c_3)$,其中

$$\varphi=-(\gamma+c_2)+\frac{\varepsilon_1 aE_0}{E_m+E_0}$$

可知,系统解的稳定性取决于 φ。对于 $\varphi<0$, $Q_1(E_0,0,0)$是稳定的,而对于 $\varphi>0$, Q_1 是一个鞍点,系统解是不稳定的。考虑到实际情况,对于默认的各参数值,φ 总是大于零的,而且任意一个参数在其取值范围内变化时,φ 总为正;对于 $\varphi<0$, Q_1 是第一象限中唯一的稳定的平衡态。

②对于平衡态 $Q_2(E_1,S_1,0)$,此时硅藻的细胞密度不为零。令 $N=0$,则由方程(4-9)可以解得

$$E_1=\frac{(\gamma+c_2)E_m}{a\varepsilon_1-\gamma-c_2},\ S_1=\frac{c_1(E_0-E_1)(E_m+E_1)}{aE_1}$$

显而易见,营养盐的函数实际值应当为正,故有

$$a\varepsilon_1>\gamma+c_2$$

当 $S_1\leqslant 0$ 时,方程代表非实际系统,但从理论上讲,此时系统是稳定的。而 $S_1>0$ 为赤潮发生的必要条件,即

$$E_0>E>E_1$$

其中 E 为藻类实际发生过程浓度。

同时,对于稳定态 $Q_2(E_1,S_1,0)$,对其对应的 Jacobi 矩阵的特征值分析表明,其稳定性变化取决于 θ,θ 由下式给出:

$$\theta=-(\delta+c_3)+\varepsilon_2 b(1-e^{-\beta S_1})$$

随参数取值的变化,稳定态 Q_2 出现跨临界分岔和超临界分岔现象。

③当 $N\neq 0$ 时,则有平衡态 $Q_3(E^*,S^*,N^*)$。

解方程(4-9),可得

$$S^*=-\frac{1}{\beta}\ln\left(1-\frac{\delta+c_3}{\varepsilon_2 b}\right)$$

E^* 取决于二次方程

$$c_1E^{*2}+[aS^*+c_1(E_m-E_0)]E^*-c_1E_0E_m=0 \tag{4-11}$$

N^* 由下式给出:

$$N^* = \frac{\varepsilon_1 c_1(E_0 - E^*) - (\gamma + c_2)S^*}{b(1 - e^{-\beta S^*})}$$

对于 E^*，解方程可得到两个根：E_1^* 和 E_2^*，两个根对应的平衡态为（E_1^*，S^*，N_1^*）和（E_2^*，S^*，N_2^*），其中

$$N_i^* = \frac{\varepsilon_1 c_1(E_0 - E_{i}^*) - (r + c_2)S^*}{b(1 - e^{-\beta S^*})}$$

对于 $i = 1$、2，方程(4-11)的两个解一个为正，一个为负。若定义 $E_1^* > 0$，则 $E_2^* < 0$，可知平衡态（E_2^*，S^*，N^*）在生态学上是非实际的状态。对于平衡态（E_1^*，S^*，N^*），其稳定性取决于两个因素：$S^* > 0$ 和 $N_2^* > 0$。由 $S^* > 0$ 可得

$$\varepsilon_2 b > \delta + c_3$$

可以认为，$\varepsilon_2 b > \delta + c_3$ 为赤潮发生和发展的必要条件之一。

$N^* > 0$ 的条件是当且仅当 $\omega > 0$，此处

$$\omega = \varepsilon_1 c_1(E_0 - E_i^*) - (\gamma + c_2)S^*$$

此外，N^* 和 E^* 的正根总是唯一的，故在 E^*、S^*、$N^* > 0$ 时，实际系统仅有一个稳定态。也就是说对于该模型方程，如果在平衡态 $Q_3(E^*, S^*, N^*)$，且 E^*、S^*、$N^* > 0$ 时若出现一个平衡态，则其在第一象限内是唯一的，且模型方程不会在该象限内产生交叉分岔，即鞍点。

分析可知，平衡态 $Q_2(E_1, S_1, 0)$ 和平衡态 $Q_3(E^*, S^*, N^*)$ 在临界分岔点出现交叉重叠，此时 $\omega = 0$。在临界点处的局部分岔行为可总结如下。

当 $\omega < 0$ 时，$(E_1, S_1, 0)$ 稳定，(E^*, S^*, N^*) 为生态非实际的（$Z^* < 0$）；当 $\omega > 0$ 时，$(E_1, S_1, 0)$ 不稳定，(E^*, S^*, N^*) 为生态实际且稳定的。

综上所述，从理论上讲，系统解的稳定性是有条件的，而且在不同的平衡态之间，稳定的条件也不同，不同平衡态之间存在着交叉重叠的现象。对于平衡态 $(N_0, 0, 0)$，稳定性较为简单明了；而对于 $(N_1, S_1, 0)$，虽然理论上存在稳定的可能性，但是实际上是不可能稳定的。在两种临界分岔 $\varphi = 0$ 和 $\omega = 0$ 处，稳定态 (E^*, S^*, N^*) 随着 ω 的减小，逐渐离开第一象限。而 $\theta = 0$ 正是两种临界分岔时的参数需要满足的条件。

为了对模型方程解的稳定性作进一步的深入讨论，考虑到赤潮发生的实际情况以及影响食物链模型的关键参数，取硅藻的增长率 a 作为控制变量（单位 $10^{-1}\ \mathrm{d}^{-1}$），对模型方程平衡态的稳定性运用分岔理论进行研究。取参数：

$$c_1 = 6.0 \times 10^{-4},\quad c_2 = 1.267 \times 10^{-2},\quad c_3 = 2.243 \times 10^{-2},\quad r = 1.20 \times 10^{-3},$$

$$b = 3.64 \times 10^{-2}\ \mathrm{d}^{-1},\quad \gamma = 1.17 \times 10^{-2}\ \mathrm{d}^{-1},\quad \delta = 9.20 \times 10^{-2}\ \mathrm{d}^{-1},\quad \varepsilon_1 = 1.235 \times 10^{-2}$$

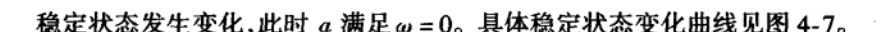
$$\varepsilon_2 = 2.185 \times 10^{-2},\quad \beta = 1.3\ \mathrm{cell \cdot L^{-1}},\quad E_m = 0.15\ \mu\mathrm{g \cdot L^{-1}},\quad E_0 = 8\ \mu\mathrm{g \cdot L^{-1}}$$

其中 c_1、c_2、c_3、r、ε_1、ε_2 为无量纲的参数，各个状态变量的初始值取值如下：

$$E(0) = 2\ \mu\mathrm{g \cdot L^{-1}},\quad S(0) = 0.1\ \mathrm{cell \cdot L^{-1}},\quad N(0) = 0.1\ \mathrm{cell \cdot L^{-1}}$$

把各参数代入模型方程，进行数值模拟仿真。

对三种平衡态下 E、S 和 N 随着 a 的变化（图 4-7）的分析可知：图 4-7(a) 中营养物质浓度 $E > 0$，须满足 $a > 1.974$，而这也正是赤潮发生的必要条件之一，即 $a\varepsilon_1 > \gamma + c_2$；当 $a = 2.01$ 时，系统的稳定性发生变化，此时也正是 $\varphi = 0$ 时 α 的取值；当 a 逐渐增大到 2.08 时，系统的



稳定状态发生变化，此时 a 满足 $\omega=0$。具体稳定状态变化曲线见图 4-7。

图 4-7　E、S、N 随 a 变化过程

(a)a—E 变化过程；(b)a—S 变化过程；(c)a—N 变化过程

当 a 变化时，$(E_0,0,0)$、$(E_1,S_1,0)$、(E^*,S^*,N^*) 三种平衡状态的稳定性变化出现了交叉传递现象。在 A、B 两点发生了跨越临界分叉，分别对应于 $a=2.01$ 和 $a=2.09$。

进一步的分析表明，当 a 继续增大时(其他参数固定不变)，系统的稳定性发生了突然变化。图 4-8 和图 4-9 给出了 $a=2.5$ 和 $a=3.0$ 时的系统时间历程图。

图 4-8 表明系统在 $a=2.5$ 时，经过一个较短的时间，趋于一个平衡点；图 4-9 表明系统在 $a=3.0$ 时经过较长时间后，趋于一个极限环。根据 Hopf 分岔理论，可以断定在 2.5～3.0 的区间内，存在一个 Hopf 分岔点。

为此，将 a 连续取此区间的值，对应所有的 S 稳态值作图(见图 4-10 当然可以类似地作出 E、S 稳态值)，发现当 $a=2.8$ 时，系统的稳定态将发生变化，从单值的稳定态转化为周期震荡解。从而可以得出，当其他参数取定值时，系统将在 $a=2.8$ 时发生 Hopf 分叉，且在 $a=5.6$ 时又存在另一个分岔点。分析表明，第一个分岔点为超临界分岔点，而第二个为亚临界分岔点。对应于点 A、B 则发生了跨越临界分岔现象。下文作出了当 a 变化时对应于硅藻细胞密度的稳态变化曲线(见图 4-10)。

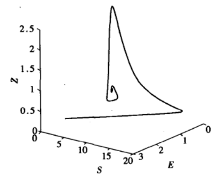


图4-8　$a=2.5$时系统时间历程

图4-9　$a=3.0$时系统时间历程

4.2.2　*E-S-Z* 模型的非线性动力学分析

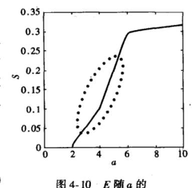


图4-10　E随a的变化历程

一般认为，海洋富营养化是造成赤潮暴发的基本条件。而赤潮藻类之间的作用对于阐明赤潮发生机理也有重要意义。本节选取了典型赤潮藻类——硅藻和甲藻，在海洋富营养化的条件下考虑两种藻类之间的相互作用及浮游动物的捕食，建立模型如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}t}&=P_1(\varepsilon_1-a_{11}P_1-a_{12}P_2-a_{13}Z)\\\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}t}&=P_2(\varepsilon_2-a_{21}P_1-a_{22}P_2-a_{23}Z)\\\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}&=Z(-\varepsilon_3+a_{31}P_1+a_{32}P_2)\end{aligned}\right\}\tag{4-12}$$

式中，P_1、P_2、Z分别代表硅藻、甲藻及浮游动物的密度；$\varepsilon_i(i=1,2)$代表两种藻类的内禀增长率；ε_3代表浮游动物的死亡率；$a_{ii}(i=1,2)$表示藻类密度制约系数；a_{12}及a_{21}分别表示两种藻类之间的相互作用系数，二者之和$(a_{12}+a_{21})$表示藻类间的作用率；a_{13}、a_{23}、a_{31}、a_{32}则表示浮游动物与藻类之间的捕食关系。

参考Azar等人的实验数据，所采用的参数表示如下：

$$\varepsilon_i=a_{ii}=1,\quad a_{23}=\mu,\quad a_{32}=d\mu,\quad a_{13}=r,\quad a_{31}=dr,\quad a_{12}=\alpha,\quad a_{21}=\beta$$

其中r为浮游动物对P_1的最大捕食率；d为浮游动物的捕食转化率且$0<d<1$。

1.稳定性分析

模型(4-12)有7个平衡点。

①三种群平衡点$S_3=(P_1^*,P_2^*,Z^*)$只有一个：

$$P_1^*=(r-dr\mu-\alpha\mu+d\mu^2)/|\boldsymbol{A}|$$

$$P_2^*=(dr^2-dr\mu-r\beta+\mu)/|\boldsymbol{A}|$$

$$Z^*=(\alpha\beta+d\mu-d\mu\beta-dr+dr\alpha-1)/|\boldsymbol{A}|$$

系统(4-12)的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & r \\ \beta & 1 & \mu \\ -dr & -d\mu & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = d[r^2 + \mu^2 - (\alpha + \beta) r\mu]$$

②两种群平衡点3个：

$$S_{101} = (r, 0, dr - 1)/dr^2$$

$$S_{011} = (0, \mu, d\mu - 1)/d\mu^2$$

$$S_{110} = (1 - \alpha, 1 - \beta, 0)/(1 - \alpha\beta)$$

③一种群平衡点3个：

$$S_{100} = (1,0,0), \quad S_{010} = (0,1,0), \quad S_{000} = (0,0,0)$$

均是不稳定的平衡点。

下面着重研究有实际意义的三种群平衡点 S_3 的稳定性及其分岔与混沌。为此，需先求出其相应的扰动方程。令

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= P_1 - P_1^* \\ x_2 &= P_2 - P_2^* \\ x_3 &= Z - Z^* \end{aligned}\right\} \tag{4-13}$$

将式(4-13)带入式(4-12)，则得扰动方程

$$\dot{X} = AX + B \tag{4-14}$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -P_1^* & -\alpha P_1^* & -rP_1^* \\ -\beta P_2^* & -P_2^* & -\mu P_2^* \\ drZ^* & d\mu Z^* & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -x_1(x_1 + \alpha x_2 + rx_3) \\ -x_2(\beta x_1 + x_2 + \mu x_3) \\ x_3(drx_1 + d\mu x_2) \end{bmatrix}$$

矩阵 A 的特征值决定了 S_3 的稳定性。其特征方程为

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \tag{4-15}$$

其中

$$a_1 = P_1^* + P_2^*$$

$$a_2 = d(r^2 P_1^* + \mu^2 P_2^*) Z^* + (1 - \alpha\beta) P_1^* P_2^*$$

$$a_3 = (dr^2 + d\mu^2 - dr\alpha\mu - dr\beta\mu) P_1^* P_2^* Z^*$$

由霍尔维茨判据，特征方程的根具有负实部的充要条件为 $a_i > 0 (i = 1,2,3)$ 且 $a_1 a_2 - a_3 > 0$。此时 S_3 是渐近稳定的。

当参数取值满足

$$a_1 a_2 - a_3 = 0 \tag{4-16}$$

时，系统将发生 Hopf 分岔。此时，特征方程(4-15)的两个共轭复数根的实部为零，即有一对纯虚根，特征方程的根为

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \quad \lambda_3 = -a_1$$

其中 $\omega_0^2 = a_2$。

下面对矩阵 A 施以变换 P，使其有形式

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & \omega_0 & 0\\ \omega_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a_1\end{bmatrix}$$

其中矩阵 P 由矩阵 A 三个特征值所对应的特征向量组成。

$$P=\begin{bmatrix}(r-1)P_1^*P_2^* & -\omega_0 rP_1^* & rP_1^*(P_2^*-a_1)-P_1^*P_2^*\\ (1-1.5r)P_1^*P_2^* & -\omega_0 rP_2^* & P_2^*(P_1^*-a_1)-1.5rP_1^*P_2^*\\ 0.5P_1^*P_2^*+\omega_0^2 & \omega_0(P_1^*+P_2^*) & 1.5P_1^*P_2^*-(P_1^*-a_1)(P_2^*-a_1)\end{bmatrix}$$

为了得到方程的正规型,做变换 $X=PY$,其中

$$Y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$$

通过复杂的线性代数运算得到

$$\dot{Y}=KY+D \tag{4-17}$$

其中

$$K=P^{-1}AP,\quad D=\begin{bmatrix}D^1(y_1,y_2,y_3)\\ D^2(y_1,y_2,y_3)\\ D^3(y_1,y_2,y_3)\end{bmatrix}$$

$D^1(y_1,y_2,y_3)$、$D^2(y_1,y_2,y_3)$、$D^3(y_1,y_2,y_3)$均为非常复杂的代数表达式。

式(4-17)右边第一项为线性项,第二项为非线性项,从这些非线性项中,可以计算出发生Hopf分岔后周期轨道的稳定系数 R_c。

$$\begin{aligned}R_c=&\frac{1}{16\omega_0}\Big[\Big(\frac{\partial^2 D^1}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 D^1}{\partial y_2^2}\Big)\frac{\partial^2 D^1}{\partial y_1\partial y_2}-\Big(\frac{\partial^2 D^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 D^2}{\partial y_1^2}\Big)\frac{\partial^2 D^2}{\partial y_1\partial y_2}+\\&\frac{\partial^2 D^1}{\partial y_2^2}-\frac{\partial^2 D^1}{\partial y_1^2}\frac{\partial^2 D^2}{\partial y_1^2}\Big]+\frac{1}{16}\Big[\frac{\partial^3 D^1}{\partial y_1^3}+\frac{\partial^3 D^2}{\partial y_2^3}+\frac{\partial^2 D^2}{\partial y_1\partial y_2^2}+\frac{\partial^3 D^2}{\partial y_1^2\partial y_2}\Big]+\\&\frac{1}{16a_1(a_1^2+4\omega_0^2)}\frac{\partial^2 D^1}{\partial y_1\partial y_3}\Big[(3a_1^2+8\omega_0^2)\frac{\partial^2 D^3}{\partial y_1^2}+(a_1^2+8\omega_0^2)\frac{\partial^2 D^3}{\partial y_2^2}-4\omega_0 a_1\frac{\partial^2 D^3}{\partial y_1\partial y_2}\Big]+\\&\frac{1}{16a_1(a_1^2+4\omega_0^2)}\frac{\partial^2 D^2}{\partial y_2\partial y_3}\Big[(a_1^2+8\omega_0^2)\frac{\partial^2 D^3}{\partial y_1^2}+(3a_1^2+8\omega_0^2)\frac{\partial^2 D^3}{\partial y_2^2}+4\omega_0 a_1\frac{\partial^2 D^3}{\partial y_1\partial y_2}\Big]+\\&\frac{1}{16a_1(a_1^2+4\omega_0^2)}\Big(\frac{\partial^2 D^1}{\partial y_2\partial y_3}+\frac{\partial^2 D^2}{\partial y_1\partial y_3}\Big)\Big[2\omega_0 a_1\frac{\partial^2 D^3}{\partial y_1^2}-2\omega_0 a_1\frac{\partial^2 D^3}{\partial y_2^2}+2a_1^2\frac{\partial^2 D^3}{\partial y_1\partial y_2}\Big]\end{aligned}$$

稳定系数 R_c 的符号决定了周期轨道的稳定性。$R_c<0$ 周期轨道稳定,$R_c>0$ 周期轨道不稳定。

2. **实例计算**

各参数取值如下:

$$d=0.5,\quad \alpha=1,\quad \beta=1.5,\quad \mu=1,\quad \varepsilon_i=a_{ii}=1$$

初始值为

$$P_1=0.2,\quad P_2=0.6,\quad Z=0.03$$

将 r 作为控制分岔参数，由式(4-16)可以算出 $r=5.486$，记为 r_f。此时，可求出 $R_c<0$，从而可以判定所产生的极限环是稳定的。

然后通过进一步的计算发现，当分岔参数变化时，系统经过不动点的 0 环面 T^0 和极限环的 1 环面 T^1，接着产生了 2 环面 T^2。由理论和实验证实：$T^2\rightarrow$混沌道路是通有的。由此可以看出，方程(4-12)所描述的生态系统，会产生稳定的极限环，并通过准周期分岔导致混沌。

3.数值模拟

各参数取值同上，仍将 r 作为分岔参数。采用 4 阶 Runge-Kutta 方法，分别计算当 $r=5.3$、6.0、7.8、10.0 时，其仿真结果如图 4-11、图 4-12、图 4-13、图 4-14、图 4-15 所示。

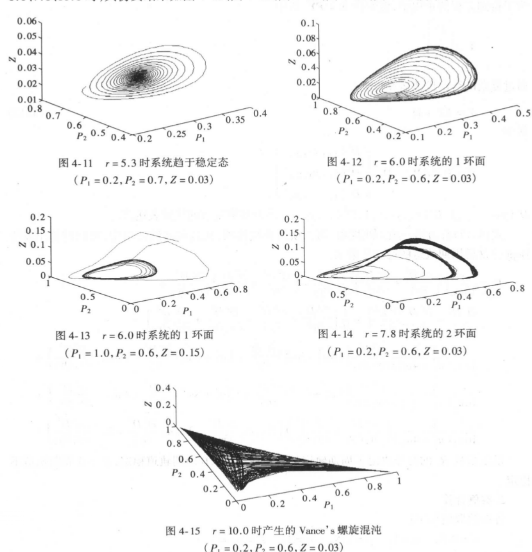


图 4-11 $r=5.3$ 时系统趋于稳定态 ($P_1=0.2, P_2=0.7, Z=0.03$)

图 4-12 $r=6.0$ 时系统的 1 环面 ($P_1=0.2, P_2=0.6, Z=0.03$)

图 4-13 $r=6.0$ 时系统的 1 环面 ($P_1=1.0, P_2=0.6, Z=0.15$)

图 4-14 $r=7.8$ 时系统的 2 环面 ($P_1=0.2, P_2=0.6, Z=0.03$)

图 4-15 $r=10.0$ 时产生的 Vance's 螺旋混沌 ($P_1=0.2, P_2=0.6, Z=0.03$)

从以上的理论计算以及数值仿真可以看出，当 r 增大时，系统状态会发生质的变化，从稳

定态到极限环最后发生混沌。精确的数值计算可以得出，当 $r=5.48$ 时，系统会发生 Hopf 分岔。对于极限环稳定性的判断，由稳定系数 $R_c<0$ 知，周期解应该稳定。现取不同的初始值作数值计算，结果参看图 4-12 与图 4-13。很明显可以看出，不同的初始值(位于极限环外的初始点与位于极限环内的初始点)均趋向于极限环，所以在适当的参数范围内，系统只存在一个稳定的 1 环面极限环。当 r 继续增大时，系统会产生 2 环面 T^2，继续增大 r 系统出现了 Vance's 螺旋混沌。由 $T^2\rightarrow$混沌道路是通有的，判定该模型所描述的生态系统通过准周期分岔产生混沌。

4. 高等动物捕食率的影响

首先考虑高等动物捕食转化率取固定值时模型的非线性动力学行为。各参数取值如下：

$$d=0.5,\quad \alpha=1,\quad \beta=1.5,\quad \mu=1,\quad \varepsilon_i=a_{ii}=1$$

初始值为：$P_1=0.2\ \mathrm{cell\cdot l^{-1}}$，$P_2=0.6\ \mathrm{cell\cdot l^{-1}}$，$Z=0.03\ \mathrm{cell\cdot l^{-1}}$，将 r 作为分岔控制参数。此时，将各参数值代入式(4-16)，计算得到分岔参数 $r\approx5.5$。

经过仿真计算发现：当分岔参数变化时，系统经过不动点的 0 环面 T^0 和极限环的 1 环面 T^1，接着产生了 2 环面 T^2。理论和实验证实：$T^2\rightarrow$混沌道路是通有的。由此可以看出，方程(4-12)所描述的生态系统，会产生稳定的极限环，并通过准周期分岔导致混沌。

固定 $r=5.3$，将 d 作为分岔参数，其他参数取值固定。系统仍然会出现经过不动点的 0 环面 T^0 和极限环的 1 环面 T^1，接着产生了 2 环面 T^2，然后产生混沌，如图 4-16 所示。

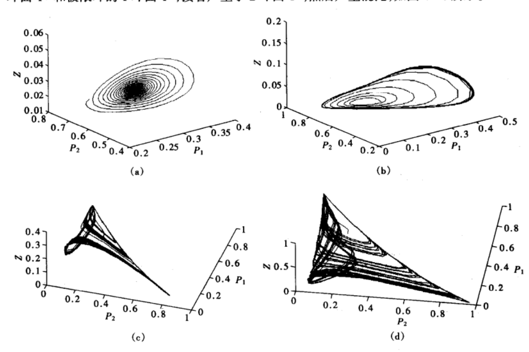


图 4-16 高等动物捕食率变化时模型的非线性动力学行为

(a) $d=0.5$ 时，系统趋于稳定态；(b) $d=0.6$ 时，系统产生的 1 环面

(c) $d=0.75$ 时，系统产生的 2 环面；(d) $d=0.8$ 时，系统出现混沌状态

从以上的计算以及数值仿真可以看出,当某些影响因子变化时,藻类的生态动力学模型会产生非常复杂的动力学行为。浮游动物对 P_1 的最大捕食率 r 增大时,系统状态会发生质的变化,从稳定态到极限环最后发生混沌。取不同的初始值,作数值计算。可以看出,在适当的参数范围内,系统只存在一个稳定的1环面极限环。当 r 继续增大时,系统会产生2环面 T^2,继续增大 r,系统出现了 Vance's 螺旋混沌。由 $T^2\rightarrow$混沌道路是通有的,判定该模型所描述的生态系统通过准周期分岔产生混沌。在此基础上,本节探讨了另外一个重要的因子捕食转化率 d,发现即使 r 值不发生变化(系统此时处于0环面),当 d 变化时,系统依然出现了复杂的动力学行为,即从稳定态到稳定的极限环以至最后产生混沌,从而可以判定高等动物的捕食转化率 d 以及浮游动物的最大捕食率 r 对藻类的非线性动力学行为均有着重要的影响,是在构建藻类的动力学模型时需要重点考虑的因素。

赤潮藻类非线性动力学模型可以用来研究特定海域藻类的时空分布、变化规律,并定量确定各种物理、化学、生物等因素对赤潮形成的影响,对解决浮游植物异常增加导致的赤潮环境问题有重要的指导意义。本节运用现代非线性动力学理论对赤潮藻类非线性动力学模型的分岔及稳定性进行了分析,重点研究了浮游动物对藻类的捕食这一重要因素对藻类非线性动力学行为的影响,得到了发生 Hopf 分岔时的参数值,判断了极限环的稳定性,并发现了该模型通过准周期分岔产生混沌。这些研究结果对于理解藻类种群的复杂动力学行为有很好的借鉴意义,并有助于建立有效的赤潮预测模型。

4.3 赤潮食物链的非线性动力学

4.3.1 *N-P-Z* 模型的非线性动力学分析

根据中肋骨条藻赤潮发生时形成的营养物质—中肋骨条藻—浮游动物形成的一个简单的食物链,利用生态学原理,考虑光照强度的影响,建立渤海湾典型赤潮藻类中肋骨条藻的生态动力学模型:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}&=-\frac{N}{e+N}\frac{a}{b+cP}P+k(N_0-N)\\\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}&=\varepsilon_1\frac{N}{e+N}\frac{a}{b+cP}P-\lambda(1-\mathrm{e}^{-\alpha P})Z-(s+k)P\\\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}&=\varepsilon_2\lambda(1-\mathrm{e}^{-\alpha P})Z-dZ^2\end{aligned}\right\}\tag{4-18}$$

式中,$N(t)$代表营养物质(包括氮、磷等营养元素)的浓度总合随时间的变化;$P(t)$代表中肋骨条藻密度随时间的变化;$Z(t)$代表浮游动物密度随时间的变化;其他各参数意义及其取值范围如表4-1所示。

表4-1 参数意义及其取值范围

符号	意义	默认取值	取值范围
a	赤潮藻的生长率	$0.2\ \mathrm{m^{-1}d^{-1}}$	0.1~0.6
b	光在水中的衰变率	$0.2\ \mathrm{m^{-1}}$	0.04~0.2
c	赤潮藻的自屏蔽作用	$0.4\ \mathrm{m^2(gC)^{-1}}$	0.3~1.2

续表

符号	意义	默认取值	取值范围
d	高等动物的捕食	$1\ m^3(gC)^{-1}$	0.25 ~ 1.0
e	吸收营养盐的半饱和常数	$0.03\ gCm^{-3}$	0.02 ~ 0.15
k	通过跃层的交换率	$0.05\ d^{-1}$	0.000 8 ~ 0.13
s	赤潮藻的沉降率	$0.04\ d^{-1}$	0.032 ~ 0.08
λ	浮游动物的最大摄食率	$0.6\ d^{-1}$	0.6 ~ 1.4
α	浮游动物摄食半饱和系数	$0.035\ gCm^{-3}$	0.02 ~ 0.1
N_0	定量输入的营养物质浓度	0.6	0.1 ~ 2.0
ε_1	赤潮藻的营养转化率	0.9	0.2 ~ 0.99
ε_2	浮游动物的营养转化率	0.9	0.2 ~ 0.99

考虑浮游动物对藻类的消耗时，采用了 Holling Ⅱ 型 Watt 功能性反应方程（陈兰荪，1988）。

考虑光照对藻类生长的影响时，采用了 Steele 公式（Edwards etc，1999）。

考虑营养物质对藻类的生长影响时，采用了米门公式（S. E. Jorgensen）。

根据模型方程的基本特征，注意到食物链模型中各元素的物理意义及在实际发生过程中相互影响、耦合，运用 Lyapunov 运动稳定性理论来判断变量各状态的稳定性。

首先求方程的平衡点，令方程(4-18)的右端为零，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{dN}{dt}&=0\\ \frac{dP}{dt}&=0\\ \frac{dZ}{dt}&=0\end{aligned}\right\}\tag{4-19}$$

解方程(4-19)得模型方程的平衡点 $Q(N^*,P^*,Z^*)$。令 $\begin{cases}u=N-N^*\\ v=P-P^*\\ w=Z-Z^*\end{cases}$，并令

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=f_1(u,v,w)\\ \frac{dv}{dt}&=f_2(u,v,w)\\ \frac{dw}{dt}&=f_3(u,v,w)\end{aligned}\right\}\tag{4-20}$$

可得模型方程(4-18)的线性部分的 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\dfrac{-aeP^*}{(e+N^*)^2(b+cP^*)}-k & \dfrac{-abN^*}{(e+N^*)(b+cP^*)^2} & 0\\ \dfrac{\varepsilon_1 aeP^*}{(e+N^*)^2(b+cP^*)} & -(s+k)+\dfrac{\varepsilon_1 abN^*}{(e+N^*)(b+cP^*)^2}-\alpha\lambda Z^*e^{-\alpha P^*} & -\lambda(1-e^{-\alpha P^*})\\ 0 & \varepsilon_1\alpha\lambda Z^*e^{-\alpha P^*} & -2dZ^*+\varepsilon_2\lambda(1-e^{-\alpha P^*})\end{bmatrix}$$

下面分别考虑 3 种定常状态的稳定性。

①对于$(N_0,0,0)$，其物理意义对应于初始水平，藻类和浮游动物密度均为零，此时的 Jacobi 矩阵

$$K=\begin{bmatrix} -k & \dfrac{-aN_0}{b(e+N_0)} & 0 \\ 0 & -(s+k)+\dfrac{\varepsilon_1 aN_0^{\bullet}}{b(e+N_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由稳定性理论，定常状态的稳定性取决于所对应的 Jacobi 矩阵的特征值。对应于$(N_0,0,0)$，其三个特征值分别为$-k$、Φ、0。其中

$$\Phi=-(s+k)+\frac{\varepsilon_1 aN_0}{b(e+N_0)}$$

由于对应矩阵的特征值有一个为零，所以要利用中心流形定理对原方程进行降维处理。经过分析得到：当$\Phi=-(s+k)+\dfrac{\varepsilon_1 aN_0}{b(e+N_0)}<0$时，此状态是稳定的；当$\Phi=-(s+k)+\dfrac{\varepsilon_1 aN_0}{b(e+N_0)}>0$时，此状态是不稳定的；当$\Phi=-(s+k)+\dfrac{\varepsilon_1 aN_0}{b(e+N_0)}=0$时，此状态对应的矩阵有两个为零的特征值，此时将会发生余维 2 的跨临界分岔。而对于所给定的所有参数在其变化范围内，总有$\Phi>0$，也就是说，定常状态$(N_0,0,0)$总是不稳定的，任何一个微小的扰动都会让它偏离$(N_0,0,0)$这个平衡位置。所以在实际的海域中，此种状态不可能稳定地存在。

②对于$(N_i^*,P_i^*,0)$，有两种情况，即$(N_1^*,P_1^*,0)$和$(N_2^*,P_2^*,0)$。其中N_1^*、N_2^*由方程

$$ck\varepsilon_1 N^2+[\varepsilon_1 a-b(s+k)+ck\varepsilon_1(e-N_0)]N-[b(s+k)+ck\varepsilon_1 N_0]e=0$$

求得；P_1^*、P_2^*由方程

$$P_i^*=\frac{b\varepsilon_1(N_0-N_i^*)}{s+k}\quad(i=1,2)$$

求得。

因为

$$N_1^*N_2^*=-\frac{[b(s+k)+ck\varepsilon_1 N_0]e}{ck\varepsilon_1}<0$$

所以两根必异号，设$N_1^*>0,N_2^*<0$。对于N_2^*无实际意义，因此只考虑N_1^*。对应于$(N_1^*,P_1^*,0)$的 Jacobi 矩阵

$$K=\begin{bmatrix} \dfrac{-aeP_1^*}{(e+N_1^*)^2(b+cP_1^*)}-k & \dfrac{-abN_1^*}{(e+N_1^*)(b+cP_1^*)^2} & 0 \\ \dfrac{\varepsilon_1 aeP_1^*}{(e+N_1^*)^2(b+cP_1^*)} & -(s+k)+\dfrac{\varepsilon_1 abN_1^*}{(e+N_1^*)(b+cP_1^*)^2} & -\lambda(1-e^{-aP_1^*}) \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\lambda(1-e^{-aP_1^*}) \end{bmatrix}$$

考虑其第 3 行，矩阵必有一特征值为$\varepsilon_2\lambda(1-e^{-aP_1^*})$且定大于零，所以此状态不稳定。

③对于第 3 种定常状态(N^*,P^*,Z^*)，也就是食物链中的 3 种主体都存在的情况，也是赤潮发生的基础条件。此时，其 Jacobi 矩阵

$$
K=\begin{bmatrix}\frac{-aeP^*}{(e+N^*)^2(b+cP^*)}-k & \frac{-abN^*}{(e+N^*)(b+cP^*)^2} & 0\\ \frac{\varepsilon_1 aeP^*}{(e+N^*)^2(b+cP^*)} & -(s+k)+\frac{\varepsilon_1 abN^*}{(e+N^*)(b+cP^*)^2}-\alpha\lambda Z^* e^{-\alpha P^*} & -\lambda(1-e^{-\alpha P^*})\\ 0 & \varepsilon_2\alpha\lambda Z^* e^{-\alpha P^*} & -2dZ^*+\varepsilon_2\lambda(1-e^{-\alpha P^*})\end{bmatrix}
$$

其中 $Z^*=\frac{\varepsilon_2\lambda(1-e\alpha P^*)}{d}$。代入式(4-19)中的第一式和第二式，可求得关于 N^*、P^* 的两个高次方程，但是无法解出具体的表达式。因此下面借助于数值的方法对其稳定性和分岔情况进行探讨。

利用现代非线性分岔与混沌理论可以较好地解决复杂情况下系统状态出现的失稳及突变现象，这与赤潮的产生密切相关。

各参数采用表4-1中的默认值，可以算出初始条件$(N,P,Z)=(0.4,0.1,0.05)$。

选取参数初始浓度 N_0 作为分岔参数对系统进行研究，分别让 N_0 取不同的值进行分析。当 $N_0=0.8$ 时，系统经过轻微的振荡过程趋于稳定；当 $N_0=2.0$ 时，系统发生剧烈振荡并且持久进行。

由Hopf分岔理论可知，当 N_0 在这个区间变化时，导致系统发生了Hopf分岔，系统从趋于一个稳定解变化为趋于一个极限环。

当 N_0 继续变大时，系统将会出现更加复杂的情况以至于混沌的产生，此时，$N_0=6.0$，其他参数取默认值。

导致混沌产生的途径很多，可以通过倍周期分岔、切分岔以及有名的周期3意味着分岔。本系统混沌行为的产生途径还有待研究，这对于了解赤潮产生以至于最后控制赤潮都很有意义。至于赤潮的产生是因为分岔导致还是混沌的行为，至今尚无定论，有待于进一步研究。

4.3.2　*N-P-Z-D* 模型的非线性动力学分析

考虑海水中营养盐浓度、浮游植物密度、浮游动物密度以及碎屑浓度等4种物质浓度(密度)，根据赤潮发生时4种物质浓度(密度)的相互作用关系并利用生态学原理，建立如下综合生态动力学模型：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=-\frac{axy}{(e+x)(b+cy)}+\frac{\lambda\beta zy^2}{(\mu^2+y^2)}+k(N_0-x)+d\gamma z^2+w\phi\\
\frac{dy}{dt}&=\frac{axy}{(e+x)(b+cy)}-\frac{\lambda zy^2}{(\mu^2+y^2)}-ry-(s+k)y\\
\frac{dz}{dt}&=\frac{\alpha\lambda y^2 z}{(\mu^2+y^2)}-dz^2\\
\frac{dw}{dt}&=(1-\alpha-\beta)\frac{\lambda y^2 z}{(\mu^2+y^2)}+ry-(k+\phi+\Psi)w
\end{aligned}\right\}\quad(4\text{-}21)
$$

式中，x 代表营养物质(包括氮、磷等营养元素)的浓度总和；$y(t)$代表浮游植物密度(各类可导致赤潮发生的藻类密度之和)；$z(t)$代表浮游动物密度；$w(t)$代表海水中有机物和无机物微小的碎屑浓度；其他各参数意义及其取值范围参见表4-2。

表 4-2　参数意义及取值范围

符号	意　义	默认取值	取值范围
a	浮游植物的最大生长率	$0.2\ m^{-1}\ d^{-1}$	0.07～0.28
b	海水消光系数	$0.2\ m^{-1}$	0.04～0.2
c	浮游植物自遮系数	$0.4\ m^2(g\ C)^{-1}$	0.3～1.2
d	高等动物的捕食	$1.0\ m^3(g\ C)^{-1}$	0.25～2.0
e	营养元吸收的半饱和系数	$0.03\ g\ C\ m^{-3}$	0.02～0.15
k	温跃层的交换率	$0.05\ d^{-1}$	0.008～0.13
r	浮游植物的呼吸率	$0.15\ d^{-1}$	0.05～0.15
s	浮游植物的沉降率	$0.04\ d^{-1}$	0.032～0.08
N_0	混合层以下的营养元浓度	$0.6\ g\ C\ m^{-3}$	0.1～2.0
α	浮游动物的生长率	0.25	0.2～0.5
β	浮游动物的排泄	0.33	0.33～0.8
γ	浮游动物排泄部分的再生	0.5	0.5～0.9
λ	浮游动物的最大捕食率	$0.6\ d^{-1}$	0.6～0.1.4
μ	浮游动物捕食的半饱和系数	$0.035\ g\ C\ m^{-3}$	0.02～0.1
ϕ	碎屑矿化率	$0.1\ d^{-1}$	0.004～0.2
Ψ	碎屑沉降率	$0.08\ d^{-1}$	0.08～0.8

为了方便讨论，将系统简记为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=f_1(x,y,z,w)\\ \dot{y}&=f_2(x,y,z,w)\\ \dot{z}&=f_3(x,y,z,w)\\ \dot{w}&=f_4(x,y,z,w)\end{aligned}\right\}\tag{4-22}$$

考虑浮游动物对藻类的消耗、光照对藻类生长的影响、营养物质对藻类的生长影响等因素，采用 A .M. Edwards 给出的较为综合的模型。

根据模型方程的基本特征，注意到食物链模型中各元素的物理意义及在实际发生过程中相互影响、耦合，运用 Lyapunov 运动稳定性理论来判断变量各状态的稳定性。

首先求方程的平衡点，令方程(4-22)的左端为零，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=0\\ \frac{dy}{dt}&=0\\ \frac{dz}{dt}&=0\\ \frac{dw}{dt}&=0\end{aligned}\right\}\tag{4-23}$$

解方程(4-23)得模型方程的平衡点 $P(x^*,y^*,z^*,w^*)$，坐标平移，令

$$\left.\begin{aligned}x_1&=x-x^*\\ y_1&=y-y^*\\ z_1&=z-z^*\\ w_1&=w-w^*\end{aligned}\right\}$$

并得到如下扰动方程：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= g_1(x_1, y_1, z_1, w_1) \\
\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} &= g_2(x_1, y_1, z_1, w_1) \\
\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} &= g_3(x_1, y_1, z_1, w_1) \\
\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t} &= g_4(x_1, y_1, z_1, w_1)
\end{aligned}\right\} \tag{4-24}
$$

可得系统式(4-23)的 Jacobi 矩阵

$$
J = \begin{bmatrix}
\dfrac{-aey^*}{(e+x^*)^2(b+cy^*)} - k & \dfrac{-abx^*}{(e+x^*)(b+cy^*)^2} + \dfrac{2\beta\lambda\mu^2 y^* z^*}{(\mu^2+y^{*2})^2} & \dfrac{\beta\lambda y^{*2}}{\mu^2+y^{*2}} + 2d\gamma z^* & \phi \\
\dfrac{aey^*}{(e+x^*)^2(b+cy^*)} & \dfrac{abx^*}{(e+x^*)(b+cy^*)^2} - \dfrac{2\lambda\mu^2 y^* z^*}{(\mu^2+y^{*2})^2} - k - r - s & \dfrac{-\lambda y^{*2}}{\mu^2+y^{*2}} & 0 \\
0 & \dfrac{2\alpha\lambda\mu^2 y^* z^*}{(\mu^2+y^{*2})^2} & \dfrac{\alpha\lambda y^{*2}}{\mu^2+y^{*2}} - 2dz^* & 0 \\
0 & r + \dfrac{2(1-\alpha-\beta)\lambda\mu^2 y^* z^*}{(\mu^2+y^{*2})^2} & \dfrac{(1-\alpha-\beta)\lambda y^{*2}}{\mu^2+y^{*2}} & -k-\phi-\Psi
\end{bmatrix}
$$

根据 Lyapunov 稳定性理论可知，动力系统的局部稳定性取决于 Jacobi 矩阵的特征值。一般来讲，对于四维动力系统的平衡点按照坐标是否为零划分，可能有 16 种类型。而针对本系统而言，具有实际意义的平衡点类型只有 8 个，即 $P_1(x^{(1)},0,0,0)$、$P_2(x^{(2)},y^{(2)},0,0)$、$P_3(x^{(3)},y^{(3)},z^{(3)},0)$、$P_4(x^{(4)},y^{(4)},0,w^{(4)})$、$P_5(x^{(5)},0,z^{(5)},w^{(5)})$、$P_6(x^{(6)},y^{(6)},z^{(6)},w^{(6)})$、$P_7(0,y^{(7)},0,0)$、$P_8(0,y^{(8)},z^{(8)},w^{(8)})$。其中 $x^{(i)}$、$y^{(i)}$、$z^{(i)}$、$w^{(i)}$ 皆为正值。

下面分别讨论系统在平衡点附近的稳定性。

(1)对于 $P_1(x^{(1)},0,0,0)$，其物理意义对应于系统的初始状态，只有营养物质浓度，而浮游植物(藻类)和浮游动物密度以及海水中有机物和无机物微小的碎屑浓度为零。此时系统的 Jacobi 矩阵

$$
J = \begin{bmatrix}
-k & \dfrac{-ax^{(1)}}{b(e+x^{(1)})} & 0 & \phi \\
0 & \dfrac{ax^{(1)}}{b(e+x^{(1)})} - k - r - s & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & r & 0 & -k-\phi-\Psi
\end{bmatrix}
$$

可以计算得到矩阵的特征值为 0、$-k$、$-(k+\phi+\Psi)$、$\dfrac{ax^{(1)}}{b(e+x^{(1)})} - (k+r+s)$。

而且，由 $P_1(x^{(1)},0,0,0)$ 为平衡点，即 P_1 使系统的右端项为零，有 $f_1(P_1) = f_2(P_1) = f_3(P_1) = f_4(P_1) = 0$，进而可以得到 $x^{(1)} = N_0$。

所以，若特征值 $\rho = \dfrac{ax^{(1)}}{b(e+x^{(1)})} - (k+r+s) > 0$，即 $x^{(1)} > \dfrac{be(k+r+s)}{a-b(k+r+s)} > 0$ 时，系统必不稳定。

当 $\rho < 0$ 时，对应矩阵的特征值有一个为零，而其余特征值皆负，此时系统为一个余维 1 的

情况，利用中心流形定理对原方程进行降维处理。经过分析可知，$\rho<0$ 时系统是稳定的。

当 $\rho=0$ 时，即 $x^{(1)}=\dfrac{be(k+r+s)}{a-b(k+r+s)}$，此时对应矩阵有两个特征值为零，系统将会发生余维 2 的跨临界分岔。由于系统中的全部参数应有各自的取值范围，而对于所给定的所有参数在其变化范围内，此种情况可不予考虑（此处代入系统默认的参数值进行分析得到的结果为 $\dfrac{be(k+r+s)}{a-b(k+r+s)}=0.009\ 5$，而 N_0 默认值范围是 0.1 ~ 2.0，所以讨论中不予考虑）。

若 N_0 取得很小，即有 $x^{(1)}=N_0<\dfrac{be(k+r+s)}{a-b(k+r+s)}$ 时，系统在平衡点处稳定。结合实际意义可知，系统的混和层下营养物质浓度很小，系统在 P_1 附近稳定，赤潮当然不会发生。

所以通常情况下，总有 $\rho>0$ 成立（在系统的参数的取值范围内，除极个别取法外），即所研究的海域中只有营养物质而无其他浮游动植物及碎屑，几乎是不可能稳定的（此种情况若真出现，显然可不予考虑）。

(2)对于 $P_2(x^{(2)},y^{(2)},0,0)$，由于 $P_2(x^{(2)},y^{(2)},0,0)$ 为平衡点，即 P_2 使系统的右端项为零，有 $f_1(P_2)=f_2(P_2)=f_3(P_2)=f_4(P_2)=0$，进而可以得到：$x^{(2)}=N_0$，$y^{(2)}=0$。因此归入第一种情况。

(3)对于 $P_3(x^{(3)},y^{(3)},z^{(3)},0)$，由于 $P_3(x^{(3)},y^{(3)},z^{(3)},0)$ 为平衡点，即 P_3 使系统的右端项为零，有 $f_1(P_3)=f_2(P_3)=f_3(P_3)=f_4(P_3)=0$。$y^{(3)}$、$z^{(3)}$ 应满足方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\alpha\lambda {y^{(3)}}^2 z^{(3)}}{(\mu^2+{y^{(3)}}^2)}-d{z^{(3)}}^2=0\\&(1-\alpha-\beta)\frac{\lambda {y^{(3)}}^2 z^{(3)}}{(\mu^2+{y^{(3)}}^2)}+ry^{(3)}=0\end{aligned}\right\}\tag{4-25}$$

方程组中涉及的参数有 α、β、λ、a、d、r，在按照参数表中参数可取值进行调整后，得到 $y^{(3)}$ 的值可能为零、复数（虚部非零）、负数。根据实际意义可知，作为浮游植物密度的 $y^{(3)}$ 只可能取零。若 $y^{(3)}=0$，则有 $z^{(3)}=0$。

这种情况再次归结为第一种情形。

(4)对于 $P_4(x^{(4)},y^{(4)},0,w^{(4)})$，由于 $P_4(x^{(4)},y^{(4)},0,w^{(4)})$ 为平衡点，即 P_4 使系统的右端项为零，有 $f_1(P_4)=f_2(P_4)=f_3(P_4)=f_4(P_4)=0$。由 $f_4(P_4)=0$ 得到 $w_1^{(4)}=\dfrac{ry_1^{(4)}}{k+\phi+\Psi}$；由 $f_2(P_4)=0$ 得到 $x_1^{(4)}=\dfrac{e(k+r+s)(b+cy_1^{(4)})}{a-(k+r+s)(b+cy_1^{(4)})}$，再代入 $f_1(P_4)=0$，则可以解出 $y_1^{(4)}$。此种情况下是可以计算出 P_4 的（由于坐标表达式过于复杂，此处从略）。

如果选择参数取默认值时的情况进行分析，有意义的 P_4 只有 1 个：P_4(0.014 146 6, 0.167 595, 0, 0.109 301)，而相应的 Jacobi 矩阵的特征值分别为：−1.767 73，−0.391 44，0.143 731，−0.113 253，所以平衡点不稳定。

为了说明系统的变化情况，选取混和层下营养物质浓度 N_0 为分岔参数进行如下分析。

分别取 N_0 = 0.1，0.3，0.6，0.8，1.0，1.2，1.5，1.8，2.0，2.6，3.0，3.8，4.4，8，10，16，30，发现所有平衡点（数学角度）中的 $y^{(4)}$ 的变化与 N_0 的变化成正比（参见图 4-17(a)、图 4-17(b)）。求得平衡点后计算特征值，得到的结果表明，系统在平衡点处皆不稳定。

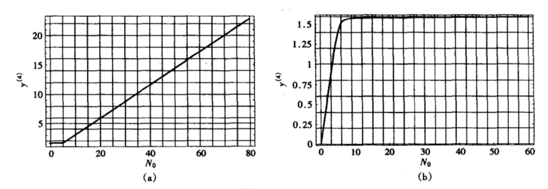


图 4-17　平衡点 P_4 处 $y(t)$ 关于 N_0 的变化

(a) $\phi = 0.1, k = 0.05; \beta = 0.33$; (b) $\phi = 0.8, k = 0.13, \beta = 0.8$

先后将参数 ϕ、k、β 调整到 0.8、0.13、0.8，进行类似地分析，得到的结论是一致的，即所有平衡点皆不稳定，且 $y^{(4)}$ 随 N_0 的增大而增加。

而且通过计算还得到这样一种结论：对于所有平衡点（仅从数学角度计算得到），系统在其附近都不稳定，即系统在超平面 $z(t) = 0$ 上是不稳定的。可以这样理解：系统即使有过 $z(t) = 0$ 的瞬间，也会立刻进入到 $z(t) > 0$ 的空间中去。

所以一旦出现浮游动物密度 $z(t)$ 趋于零的情况，则系统必然是不稳定的。而此时浮游植物密度 $y(t)$ 关于 N_0 的变化趋势说明：虽然该平衡点不稳定，但这种不稳定性的存在，也说明了系统本身的不确定性与复杂性，在某种外界扰动出现时就会发生赤潮。

(5) 对于 $P_5(x^{(5)}, 0, z^{(5)}, w^{(5)})$，由于 $P_5(x^{(5)}, 0, z^{(5)}, w^{(5)})$ 为平衡点，即 P_5 使系统(1)的右端项为零，即有 $f_1(P_5) = f_2(P_5) = f_3(P_5) = f_4(P_5) = 0$，显然得到 $z^{(5)} = w^{(5)} = 0$，归结为第一种类型。

(6) 对于 $P_6(x^{(6)}, y^{(6)}, z^{(6)}, w^{(6)})$，系统的平衡状态为食物链中的四种主体都存在的情况，也是赤潮发生的基础条件。此时，其 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{-aey^{(6)}}{(e+x^{(6)})^2(b+cy^{(6)})} - k & \dfrac{-abx^{(6)}}{(e+x^{(4)})(b+cy^{(6)})^2} + \dfrac{2\beta\lambda\mu^2 y^{(6)} z^{(6)}}{(\mu^2+y^{(6)^2})^2} & \dfrac{\beta\lambda y^{(6)2}}{\mu^2+y^{(4)^2}} + 2dyz^{(6)} & \phi \\ \dfrac{aey^{(6)}}{(e+x^{(6)})^2(b+cy^{(6)})} & \dfrac{abx^{(6)}}{(e+x^{(4)})(b+cy^{(4)})^2} - \dfrac{2\lambda\mu^2 y^{(6)} z^{(6)}}{(\mu^2+y^{(6)^2})^2} - k - r - s & \dfrac{-\lambda y^{(6)^2}}{\mu^2+y^{(6)^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{2\alpha\lambda\mu^2 y^{(6)} z^{(6)}}{(\mu^2+y^{(6)^2})^2} & \dfrac{\alpha\lambda y^{(6)^2}}{\mu^2+y^{(6)^2}} - 2dz^{(6)} & 0 \\ 0 & r + \dfrac{2(1-\alpha-\beta)\lambda\mu^2 y^{(6)} z^{(6)}}{(\mu^2+y^{(6)^2})^2} & \dfrac{(1-\alpha-\beta)\lambda y^{(6)^2}}{\mu^2 y^{(6)^2}} & -k-\phi-\Psi \end{bmatrix}$$

由 P_6 满足 $f_4(P_6) = 0$ 可得

$$w = \frac{(1-\alpha-\beta)}{(k+\phi+\Psi)} \frac{\lambda y^2 z}{(\mu^2+y^2)} + \frac{ry}{(k+\phi+\Psi)} \tag{4-26}$$

代入 $f_1(P_6) = f_2(P_6) = f_3(P_6) = 0$ 后得到的方程组相当复杂，无法求出解析表达式，所以

借助于数值仿真的方法,分析系统的稳定性和分岔情况。

首先对系统参数取最具实际意义的默认值时的情况进行分析。在参数取默认值时系统为

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 0.03 - 0.05x - \frac{0.2xy}{(0.03+x)(0.2+0.4y)} + \frac{0.198y^2 z}{0.001\,225 + y^2} + 0.5z^2 + 0.1w \\
\frac{dy}{dt} &= -0.24y + \frac{0.2xy}{(0.03+x)(0.2+0.4y)} + \frac{0.6y^2 z}{0.001\,225 + y^2} \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{0.15y^2 z}{0.001\,225 + y^2} - z^2 \\
\frac{dw}{dt} &= 0.15y + \frac{0.252y^2 z}{0.001\,225 + y^2} - 0.23w
\end{aligned}\right\} \tag{4-27}
$$

计算该系统的平衡点,可得到 13 组解(其中 7 组为实数解),而真正有实际意义的只有 3 组解:$Q_1(0.6,0,0,0)$,$Q_2(0.014\,146\,6,0.167\,595,0,0.103\,01)$,$Q_3(0.330\,718,0.033\,739\,7,0.072\,250\,8,0.060\,134\,1)$。

①该系统在平衡点 $Q_1(0.6,0,0,0)$的 Jacobi 矩阵

$$
\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} -0.05 & -0.952\,381 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.712\,381 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & -0.23 \end{bmatrix}
$$

其特征值为:0,−0.05,−0.23,0.712 381。所以系统在 Q_1 处不稳定,结论与前面分析所得完全相符(属于情况 1)。

②该系统在平衡点 $Q_2(0.014\,146\,6,0.167\,595,0,0.103\,01)$的 Jacobi 矩阵

$$
\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} -1.982\,17 & -0.179\,75 & 0.189\,726 & 0.1 \\ 1.932\,17 & -0.060\,250\,3 & -0.574\,926 & 0 \\ 0 & 0 & 0.143\,731 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.241\,469 & -0.23 \end{bmatrix}
$$

其特征值为:−1.767 73,−0.391 44,0.143 71,−0.113 253。所以系统在 Q_2 处不稳定(属于情况 4)。

③该系统在平衡点 $Q_3(0.330\,718,0.033\,739\,7,0.072\,250\,8,0.060\,134\,1)$的 Jacobi 矩阵

$$
\boldsymbol{B}_3 = \begin{bmatrix} -0.057\,287\,3 & -0.592\,868 & 0.167\,622 & 0.1 \\ 0.007\,287\,31 & -0.079\,786 & 0 & 0 \\ 0 & 0.160\,39 & -0.072\,250\,8 & 0 \\ 0 & 0.419\,456 & 0.121\,381 & -0.23 \end{bmatrix}
$$

其特征值为:−0.078 311 7 + 0.224 441i,−0.078 311 7 − 0.224 441i,−0.227 387,−0.052 493 9。所以系统在 Q_3 处稳定。

以初始条件 $x(0)=0.4, y(0)=0.1, z(0)=0.05, w(0)=0.08$ 模拟系统状态变化,如图 4-18、图 4-19、图 4-20、图 4-21、图 4-22 所示。

下面采用数值计算的方法,分析四维的空间区域:$\Omega = \{(x,y,z,w) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, w \geqslant 0\}$ 中系统的稳定性,以及考察 3 个超平面 $y=0$、$z=0$、$w=0$ 上的稳定性。

将营养盐浓度 $x(t)$在混合层下的值 N_0 作为分岔参数对系统进行分析,通过大量的数值

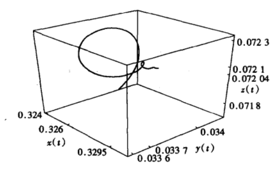


图 4-18　$\{x(t),y(t),z(t)\}$在 Q_3 附近的稳定性态

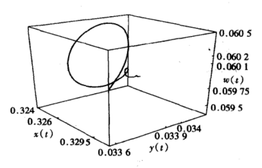


图 4-19　$\{x(t),y(t),w(t)\}$ 在 Q_3 附近的稳定性态

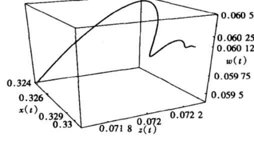


图 4-20　$\{x(t),z(t),w(t)\}$ 在 Q_3 附近的稳定性态

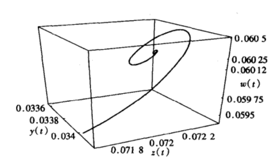


图 4-21　$\{y(t),z(t),w(t)\}$在 Q_3 附近的稳定性态

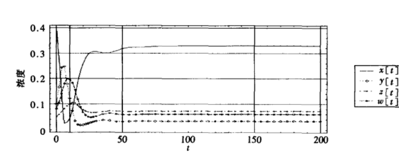


图 4-21　$\{x(t),y(t),z(t),w(t)\}$在 Q_3 附近的时程曲线

计算(参见表 4-3、表 4-4、表 4-5、表 4-6),可得到如下结论:

①当 $0.1\leqslant N_0\leqslant 0.635\,6$ 时,系统在域 Ω 内只有 1 个稳定的平衡点,而在域 Ω 外有 3 个稳定的平衡点;

②当 $0.635\,8\leqslant N_0\leqslant 1.678\,2$ 时,系统在域 Ω 内只有 1 个稳定的平衡点,而在域 Ω 外也只有 1 个稳定的平衡点;

③当 $1.678\,3\leqslant N_0\leqslant 80$ 时,系统在域 Ω 内有 3 个稳定的平衡点,而在域 Ω 外有 1 个稳定的平衡点。

所以在系统参数除 N_0 外,其他参数皆取默认值时,系统有静态分岔参数 $N_1 \approx 0.635\,7$ 和 $N_2 \approx 1.678\,25$。

通过编程计算,在表 4-3、表 4-4、表 4-5、表 4-6 中列出了不同的 N_0 取值分别在不同的 a 值(浮游植物密度的最大生长率)的情况下所对应的域内和域外的平衡点。值得注意的是,域 Ω 外的稳定平衡点的坐标满足:$x<0, y>0, z>0, w>0$,而若 $y<0$,则在其附近不会引发赤潮,故不予考虑。

系统当中存在稳定平衡点和不稳定平衡点,在几个超平面上($y=0, z=0, w=0$)的平衡点皆为不稳定的。那些稳定平衡点(包括域内、域外)的特征值皆具有负实部,所以这些点皆为系统的汇,对其周围状态变量形成各自的吸引域。因而 Ω 中是否会出现赤潮,就要看这些稳定平衡点($x^{(6)}, y^{(6)}, z^{(6)}, w^{(6)}$)中的 $y^{(6)}$(浮游植物密度)的大小,即要看这些点将状态变量向何处吸引。而且当 $a=0.4$ 或 0.9 而 $N_0=0.1$ 时,在域 Ω 外还有一个稳定平衡点,但其第二个坐标值小于零,所以在表 4-3、表 4-4、表 4-5、表 4-6 中没有列出。

表 4-3　$a=0.2$ 的稳定平衡点一览表

N_0	Ω 域内稳定平衡点(x,y,z,w)				Ω 域外稳定平衡点(x,y,z,w)			
					-4.204 31,	1.045 15,	0.149 832,	0.845 597
0.1	0.022 477 9,	0.016 276 7,	0.026 672 1,	0.0158116	-0.975 51,	0.141 865,	0.141 394,	0.238 55
					-0.309 808,	0.044 938 5,	0.093 365 2,	0.092 980 1
					-4.007 43,	1.046 04,	0.149 832,	0.846 179
0.3	0.101 859,	0.028 076,	0.058 730 1,	0.043 504 8	-0.757 549,	0.137 847,	0.140 915,	0.234 944
					-0.200 775,	0.052 927 3,	0.104 363,	0.114073
					-3.712 72,	1.047 55,	0.149 833,	0.847 166
0.6	0.330 718,	0.033 739 7,	0.072 250 8,	0.060 134 1	-0.374 031,	0.120 105,	0.138 259,	0.217 956
					-0.200 146,	0.088 963 3,	0.129 895,	0.181 263
					-3.677 8,	1.047 75,	0.149 833,	0.847 294
0.635 6	0.362 5,	0.034 038,	0.072 910 2,	0.061 027 8	-0.271 225,	0.107 09,	0.135 524,	0.203 998
					-0.261 673,	0.105 339,	0.135 087,	0.201 992
0.635 8	0.362 68,	0.034 039 5,	0.072 913 6,	0.061 032 5	-3.677 61,	1.047 75,	0.149 833,	0.847 295
1	0.705 712,	0.035 691 8,	0.076 467 8,	0.065 988 1	-3.321 21,	1.049 98,	0.149 834,	0.848 75
1.678 2	1.371 63,	0.036 651 5,	0.078 455 5,	0.068 863 3	-2.662 93,	1.055 67,	0.149 835,	0.852 469
	0.295 963,	0.218 093,	0.146 234,	0.298 433				
1.678 3	0.297 829,	0.217 6,	0.146 217,	0.298 076	-2.662 84,	1.055 67,	0.149 835,	0.852 47
	1.371 73,	0.036 651 6,	0.078 455 6,	0.068 863 6				
	0.154 634,	0.345 08,	0.148 473,	0.386 07				
2	0.777 785,	0.176 838,	0.144 346,	0.267 52	-2.354 34,	1.059 45,	0.149 836,	0.854 933
	1.690 84,	0.036 854 3,	0.078 868 4,	0.069 470 1				
	0.151 639,	0.487 102,	0.149 23,	0.480 339				
2.5	1.312 67,	0.168 219,	0.143 776,	0.260 7	-1.882 94,	1.067 62,	0.149 839,	0.860 27
	2.188 26,	0.037 056 2,	0.079 276 9,	0.070 073 6				
	0.185 277,	0.619 787,	0.149 523,	0.567 513				
3	1.826 58,	0.164 83,	0.143 529,	0.257 971	-1.428 57,	1.080 67,	0.149 843,	0.868 786
	2.686 61,	0.037 185 5,	0.079 537 2,	0.070 459 9				

续表

N_0	Ω 域内稳定平衡点(x, y, z, w)				Ω 域外稳定平衡点(x, y, z, w)			
4	0.401 894, 2.839 09, 3.684 62,	0.843 346, 0.161 806, 0.037 341 3,	0.149 742, 0.143 295, 0.079 849 5,	0.713 791 0.255 51 0.070 925 2	−0.655 596,	1.145 57,	0.149 86,	0.911151
5	1.016 36, 3.844 94, 4.683 47,	0.953 495, 0.160 399, 0.037 431 8,	0.149 798, 0.143 183, 0.080 030 3,	0.785 75 0.254 356 0.071 195 2	−0.274 789,	1.322 61,	0.149 895,	1.026 69
6	1.897 58, 4.848 35, 5.682 71,	0.987 441, 0.159 582, 0.037 490 9,	0.149 812, 0.143 116, 0.080 148 1,	0.807 919 0.253 684 0.071 371 6	−0.158 708,	1.575 4,	0.149 926,	1.191 62
8	3.827 91, 6.852 16, 7.681 79,	1.007 35, 0.158 672, 0.037 563 4,	0.149 819, 0.143 04, 0.080 292 3,	0.820 922 0.252 932 0.071 588	−0.092 010 9,	2.128 38,	0.149 959,	1.552 33
10	5.804 48, 8.854 24, 9.681 24,	1.014 05, 0.158 176, 0.037 606 2,	0.149 822, 0.142 999, 0.080 377 4,	0.825 294 0.252 522 0.071 715 7	−0.070 184 1,	2.694 23,	0.149 975,	1.921 4
15	10.783 5, 13.856 8, 14.680 5,	1.020 05, 0.157 565, 0.037 662 5,	0.149 824, 0.142 947, 0.080 488 9,	0.829 213 0.252 015 0.071 883 5	−0.051 141 8,	4.119 1,	0.149 989,	2.850 69
20	15.775 7, 18.858, 19.680 2,	1.022 27, 0.157 279, 0.037 690 3,	0.149 824, 0.142 922, 0.080 543 9,	0.830 661 0.251 778 0.071 966 3	−0.044 292 6,	5.547 47,	0.149 994,	3.782 25
30	25.769 2, 28.859 2, 29.679 8,	1.024 13, 0.157 005, 0.037 717 9,	0.149 825, 0.142 899, 0.080 598 5,	0.831 875 0.251 55 0.072 048 5	−0.038 655 9,	8.406 55,	0.149 997,	5.646 87
40	35.766 3, 38.859 7, 39.679 6,	1.024 95, 0.156 872, 0.037 731 6,	0.149 825, 0.142 887, 0.080 625 6,	0.832 411 0.251 439 0.072 089 3	−0.036 203 6,	11.266 5,	0.149 999,	7.512 09
50	45.764 7, 48.860 1, 49.679 5,	1.025 41, 0.156 794, 0.037 739 7,	0.149 825, 0.142 88, 0.080 641 8,	0.832 713 0.251 374 0.072 113 7	−0.034 833 1,	14.126 8,	0.149 999,	9.377 51
60	55.763 7, 58.860 3, 59.679 5,	1.025 71, 0.156 742, 0.037 745 2,	0.149 826, 0.142 876, 0.080 652 5,	0.832 907 0.251 331 0.072 13	−0.033 958 2,	16.987 3,	0.149 999,	11.243
80	75.762 4, 78.860 5, 79.679 4,	1.026 07, 0.156 678, 0.037 752,	0.149 826, 0.142 87, 0.080 666,	0.833 141 0.251 277 0.072 150 2	−0.032 905 9,	22.708 4,	0.15,	14.974 2

表 4-4　$a = 0.28$ 的稳定平衡点一览表

N_0	Ω 域内稳定平衡点(x, y, z, w)				Ω 域外稳定平衡点(x, y, z, w)			
0.1	0.014 468,	0.017 288 9,	0.029 421 7,	0.017 598 3	−7.396 68,	1.958 09,	0.149 952,	1.441 26
0.6	没有稳定平衡点,但有稳定高维 Hopf 分岔				−6.899 84,	1.958 99,	0.149 952,	1.441 85
2	0.044 028 9,	0.376 13,	0.148 712,	0.406 84	−5.511 69,	1.962 38,	0.149 952,	1.444 06
6	0.171 328,	1.481 01,	0.149 916,	1.130 04	−1.651 19,	2.002 28,	0.149 954,	1.470 08
8	0.895 558,	1.845 89,	0.149 946,	1.368 07	−0.376 321,	2.209 7,	0.149 962,	1.605 37

续表

N_0	Ω 域内稳定平衡点(x,y,z,w)				Ω 域外稳定平衡点(x,y,z,w)			
10	2.666 41,	1.911 44,	0.149 95,	1.410 83	−0.147 669,	2.716 4,	0.149 975,	1.93586
15	7.589 22,	1.933 52,	0.149 951,	1.425 23	−0.071 108,	4.124 81,	0.149 989,	2.854 42
20	12.572 5,	1.938 3,	0.149 951,	1.428 35	−0.054 699 8,	5.550 45,	0.149 994,	3.784 19
30	22.561 2,	1.941 53,	0.149 951,	1.430 45	−0.043 696 2,	8.407 99,	0.149 997,	5.647 81
40	32.556 8,	1.942 78,	0.149 951,	1.431 27	−0.039 467 2,	11.267 5,	0.149 999,	7.512 7
50	42.554 5,	1.943 44,	0.149 951,	1.431 7	−0.037 231 9,	14.127 5,	0.149 999,	9.377 95

表 4-5　$a=0.4$ 的稳定平衡点一览表

N_0	Ω 域内稳定平衡点(x,y,z,w)				Ω 域外稳定平衡点(x,y,z,w)			
0.1	0.009 287 4,	0.017 911 9,	0.031 132 3,	0.018 761 2	−11.893 8,	3.244 51,	0.149 983,	2.280 3
0.6	0.044 906 9,	0.058 182 6,	0.110 143,	0.126 558	−11.395 5,	3.244 98,	0.149 983,	2.280 6
2	0.021 371,	0.382 507,	0.148 755,	0.411 091	−10.001,	3.246 55,	0.149 983,	2.281 62
6	0.045 681 9,	1.516 94,	0.149 92,	1.153 48	−6.030 48,	3.254 99,	0.149 983,	2.287 13
8	0.081 315 2,	2.078 8,	0.149 957,	1.519 99	−4.066 55,	3.265 31,	0.149 983,	2.293 86
10	0.179 222,	2.622 89,	0.149 973,	1.874 87	−2.164 7,	3.293 39,	0.149 983,	2.312 17
15	3.182 2,	3.194 16,	0.149 982,	2.247 45	−0.167 977,	4.152 52,	0.149 989,	2.872 49
20	8.098 4,	3.218 13,	0.149 982,	2.263 09	−0.084 325 2,	5.558 93,	0.149 994,	3.78972
30	18.068 2,	3.226 75,	0.149 982,	2.268 71	−0.054 311 3,	8.411 03,	0.149 997,	5.649 8
40	28.059 5,	3.229 26,	0.149 982,	2.270 35	−0.045 636 3,	11.269 2,	0.149 999,	7.513 85
50	38.055 3,	3.230 44,	0.149 982,	2.271 12	−0.041 520 4,	14.128 8,	0.149 999,	9.378 75

表 4-6　$a=0.9$ 的稳定平衡点一览表

N_0	Ω 域内稳定平衡点(x,y,z,w)				Ω 域外稳定平衡点(x,y,z,w)			
0.1	0.003 676 3,	0.018 562 4,	0.032 929 1,	0.020 026 2	−30.220 7,	8.487 24,	0.149 997,	5.699 5
0.6	0.011 002 7,	0.061 695 2,	0.113 479,	0.134 297	−29.721 3,	8.487 39,	0.149 997,	5.699 6
2	0.006 801 6,	0.386 611,	0.148 781,	0.413 824	−28.322 9,	8.487 86,	0.149 997,	5.699 91
6	0.011 053 2,	1.526 85,	0.149 921,	1.159 95	−24.328 6,	8.489 5,	0.149 997,	5.700 97
8	0.014 551,	2.097 89,	0.149 958,	1.532 45	−22.332 3,	8.490 54,	0.149 997,	5.701 65
10	0.018 818 6,	2.668 77,	0.149 974,	1.904 8	−20.336 6,	8.491 78,	0.149 997,	5.702 46
15	0.034 511 7,	4.094 59,	0.149 989,	2.834 71	−16.2.352 4,	8.496 3,	0.149 997,	5.705 41
20	0.065 341 2,	5.516 11,	0.149 994,	3.761 8	−10.383 3,	8.505 13,	0.149 997,	5.711 17
30	0.842 205,	8.154 56,	0.149 997,	5.482 53	−1.160 18,	8.727 38,	0.149 998,	5.856 11
40	9.812 09,	8.449 25,	0.149 997,	5.674 72	−0.130 089,	11.293 4,	0.149 999,	7.529 61
50	19.761 7,	8.463 65,	0.149 997,	5.684 11	−0.079 752 8,	14.139 7,	0.149 999,	9.385 89

在此将平衡点中的 $y^{(6)}$ 绘制成图形，在某个 N_0 值对应多个平衡点时，只考虑 $y^{(6)}$ 值最大的平衡点(考察是否会引发赤潮)，如图 4-23、图 4-24、图 4-25、图 4-26、图 4-27、图 4-28 所示。

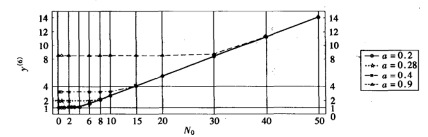


图 4-23　域 Ω 外平衡点的坐标 $y^{(6)}$ 关于 N_0 值的变化

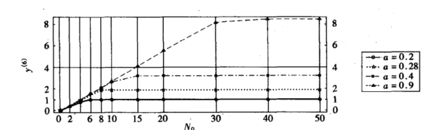


图 4-24　域 Ω 内平衡点的坐标 $y^{(6)}$ 关于 N_0 值的变化

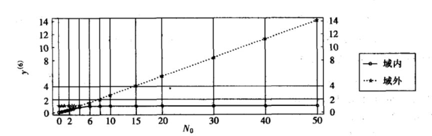


图 4-25　系统在 $a=0.2$ 时的稳定平衡点的坐标 $y^{(6)}$ 关于 N_0 值的变化

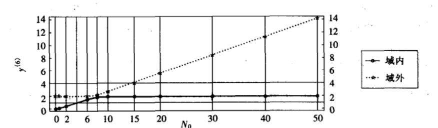


图 4-26　系统在 $a=0.28$ 时的稳定平衡点的坐标 $y^{(6)}$ 关于 N_0 值的变化

比较 $a=0.2$ 与 $a=0.28$ 时系统所具有的稳定平衡点，发现虽然 N_0 增大时域 Ω 内的平衡

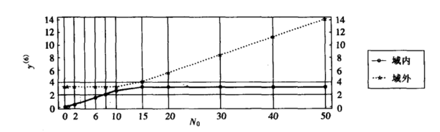


图 4-27 系统在 $a=0.4$ 时的稳定平衡点的坐标 $y^{(6)}$ 关于 N_0 值的变化

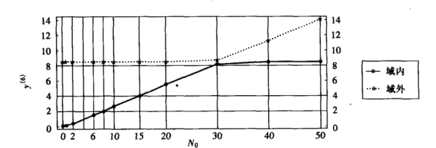


图 4-28 系统在 $a=0.9$ 时的稳定平衡点的坐标 $y^{(6)}$ 关于 N_0 值的变化

点数目未增加,但坐标 $y^{(6)}$ 的值却迅速增大了。通过分析得到结论:在域 Ω 内存在系统的汇,这些汇随着 N_0 的增加而增大,也随着 a 的增加而增大。

当 $a=0.4$ 且 $N_0=6$ 时,系统内外汇的 $y^{(6)}$ 坐标值分别为 1.516 94 和 3.254 99;而当 $a=0.9$ 且 $N_0=6$ 时,系统内外汇的 $y^{(6)}$ 坐标值分别为 1.526 85 和 8.489 5。所以在实际的海域中,若有各种因素导致 N_0 或 a 的异常增大,则极有可能引发赤潮。

系统发生了分岔,说明 N_0(混和层下营养物质浓度)的变化会引起性态发生根本变化,若再配合有其他随机扰动,则极可能导致赤潮的发生。

由于系统本身参数众多且变化复杂,对系统作用显著,并与赤潮发生密切相关的参数才是应着重关注的,如浮游植物密度的最大生长率 a,其大小直接导致系统状态稳定性的变化。

在此分析了当大部分参数取默认值时,系统对 N_0(混和层下营养物质浓度)和 a(浮游植物密度的最大生长率)的变化而产生的分岔现象,以及可能导致赤潮产生的原因,即系统汇的第二个坐标值 $y^{(6)}$ 迅速增长的条件。至于多大的 $y^{(6)}$ 值才能引发赤潮,要看导致赤潮的藻类的浓度阈值的大小。

(7)对于 $P_7(0,y^{(7)},0,0)$,将其代入式(4-21)可知,此类平衡点不会出现。

(8)对于 $P_8(0,y^{(8)},z^{(8)},w^{(8)})$,将其代入(4-21)可得 $\frac{a\lambda y^{(8)^2}z^{(8)}}{(\mu^2+y^{(8)^2})}-dz^{(8)^2}=0$,即有 $z^{(8)}=\frac{a\lambda y^{(8)^2}}{d(\mu^2+y^{(8)^2})}$ 或 $z^{(8)}=0$,进一步分析可得 $y^{(8)}=0$ 或 $y^{(8)}<0$,显然 $P_8(0,y^{(8)},z^{(8)},w^{(8)})$ 已无实际意义。

该四维动力系统是否会产生(高维)Hopf 分岔,则可选定分岔参数(系统中的参数或系统

中若干参数的函数)，只要系统在求得的平衡点处满足(高维)Hopf 分岔定理的条件，则系统在平衡点附近存在 Hopf 分岔。

4.3.3　赤潮藻类食物链模型的高维 Hopf 分岔

由于确定系统形式的复杂性，求得解析形式的高维 Hopf 分岔条件相当困难，在参数取默认值的前提下，系统的稳定性与系统的两类平衡点在大部分情况下有密切关系。

当 $a=0.28$，而 $N_0=0.6$ 时，系统可能存在稳定的高维 Hopf 分岔。在此作详细分析。

1. 确定系统在 $a=0.28$ 时稳定性分岔区域

①若 $N_0=0.578\ 553$，在域 Ω 内平衡点为 $Q_1(0.131\ 502, 0.048\ 105\ 5, 0.098\ 080\ 6, 0.101\ 64)$，$Q_1$ 处 Jacobi 矩阵的特征值为

$$\{-6.905\ 12\times10^{-7}+0.291\ 49\mathrm{i},\ -6.905\ 12\times10^{-7}-0.291\ 49\mathrm{i},\ -0.220\ 978,\ -0.072\ 872\ 5\}$$

②若 $N_0=0.578\ 555$，在域 Ω 内有平衡点为 $Q_2(0.131\ 504, 0.048\ 105\ 9, 0.098\ 081\ 2, 0.101\ 641)$，$Q_2$ 处 Jacobi 矩阵的特征值为

$$\{2.880\ 53\times10^{-6}+0.291\ 487\mathrm{i}, 2.880\ 53\times10^{-6}+0.291\ 487\mathrm{i},\ -0.220\ 978,\ -0.072\ 872\ 4\}$$

③若 $N_0=1.101\ 472$，在域 Ω 内有平衡点为 $Q_3(0.097\ 456\ 1, 0.126\ 86, 0.139\ 3, 0.224\ 098)$，$Q_3$ 处 Jacobi 矩阵的特征值为

$$\{7.479\ 43\times10^{-7}+0.252\ 174\mathrm{i},\ 7.479\ 43\times10^{-7}-0.252\ 174\mathrm{i},\ -0.206\ 134,\ -0.119\ 223\}$$

④若 $N_0=1.101\ 473$，在域 Ω 内平衡点为 $Q_4(0.097\ 455\ 8, 0.126\ 87, 0.139\ 3, 0.224\ 098)$，$Q_4$ 处 Jacobi 矩阵的特征值为

$$\{-3.833\ 45\times10^{-7}+0.252\ 174\mathrm{i},\ -3.833\ 45\times10^{-7}-0.252\ 174\mathrm{i},\ -0.206\ 134,\ -0.119\ 223\}$$

显然 Q_1、Q_4 为稳定平衡点，Q_2、Q_3 为不稳定平衡点。

所以在 $a=0.28$ 时，系统关于 N_0 在 0.578 553 与 0.578 555 之间以及 1.101 472 与 1.101 473 之间有稳定性分岔参数，而且通过对平衡点的稳定性以及平衡点处 Jacobi 矩阵的特征值关于 N_0 变化的分析，可得如下结论。

结论 1　当分岔参数 N_0 满足 $0.578\ 554\ 45\leqslant N_0\leqslant1.101\ 472\ 3$(精度为 10^{-7})时，系统在域 Ω 内的平衡点不稳定，但存在稳定的高维(四维)Hopf 分岔(极限环面)，出现高维(四维)Hopf 分岔的参数域为 $HBP=[0.578\ 554\ 45, 1.101\ 472\ 3]$。当 $0.1\leqslant N_0<0.578\ 554\ 45$ 或 $N_0>1.101\ 472\ 3$(精度为 10^{-7})时，系统在域 Ω 内的平衡点稳定。

在分岔参数域 HBP 内，进一步分析可知：

若 $N_0=0.734\ 109\ 6$，系统有不稳定平衡点 $Q_5(0.178\ 975,\ 0.058\ 186\ 9,\ 0.110\ 147, 0.126\ 567)$，$Q_5$ 处 Jacobi 矩阵的特征值为

$$\{0.068\ 595+0.214\ 626\mathrm{i}, 0.068\ 595-0.214\ 626\mathrm{i},\ -0.225\ 361,\ -0.073\ 253\ 2\}$$

在三维空间 $\Sigma(x,y,z)$ 中绘制的极限环面的旋转方向为 x—y，但极限环面旋转方向并不明显。

若 $N_0=0.734\ 109\ 7$，系统有不稳定平衡点 $Q_6(0.178\ 975, 0.058\ 186\ 9, 0.110\ 147, 0.126\ 567)$，$Q_6$ 处 Jacobi 矩阵的特征值为

$$\{-0.225\ 321, 0.068\ 595+0.214\ 626\mathrm{i}, 0.068\ 595-0.214\ 626\mathrm{i},\ -0.073\ 253\ 2\}$$

在三维空间 $\Sigma(x,y,z)$ 中绘制的极限环面的旋转方向为 y—z；但极限环面旋转方向并不明显。

结论 2　系统存在极限环面旋转方向分岔值 $N_0\approx0.734\ 109\ 65$ (精度为 10^{-7})。

2. 系统各类分岔性态的数字模拟

在 $a=0.28, N_0=1.2$ 时，观察 200 d(设观察的时间步长为 $\tau=0.5$ d)的相图，结论是系统收敛于 Ω 内的稳定平衡点，但在靠近平衡点时却有丰富的动力学行为(参见图4-29、图4-30)。

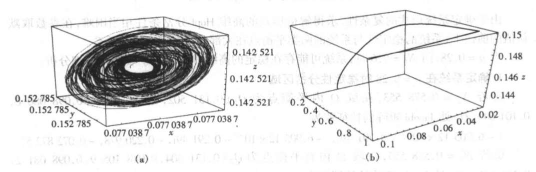


图 4-29　$a=0.28, N_0=1.2$ 时系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内相应平衡点处的相图

(a)平衡点附近；(b)域 Σ 内

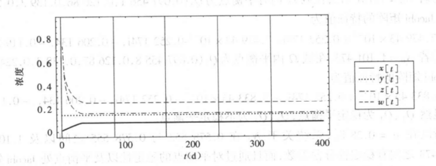


图 4-30　$a=0.28, N_0=1.2$ 时系统各类物质浓度的时程图 (200 d)

在 $a=0.28, N_0=1.1$ 时，观察 200 d(设观察的时间步长为 $\tau=0.5$ d)的相图，结论是系统收敛于 Σ 内的稳定 1 环面，在域 Ω 内应为稳定的四维 Hopf 分岔(参见图4-31、图4-32)。

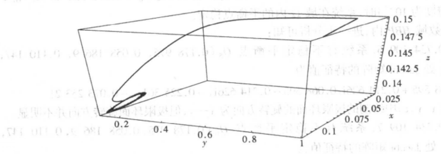


图 4-31　$a=0.28, N_0=1.1$ 系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内相应平衡点附近的 1 环面

在 $a=0.28$，初值取为$\{0.4,0.9,0.15,0.08\}$的情况下，当 $N_0=0.6$ 时，连续观察 200 d(设

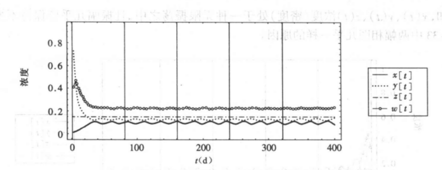


图4-32　$a=0.28, N_0=1.1$ 时系统各类物质浓度的时程图（观察200 d）

观察的时间步长为 $\tau=0.5$ d)所得到的相图与观察3 000 d所得到的相图基本一致(见图4-33)。系统在 $\Sigma(x,y,z)$ 内存在稳定的1环面，相应地系统在 Ω 内存在稳定的四维Hopf分岔。而当 $N_0=0.578$ 时，所得到的1环面的内径很小。

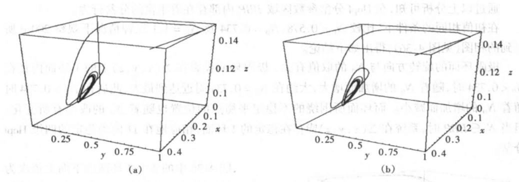


图4-33　$a=0.28, N_0=0.6$ 系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内相应平衡点附近的1环面

(a)200 d;(b)3 000 d

比较系统在观察200 d与观察3 000 d中各类物质浓度(密度)的时程图(见图4-34、图4-

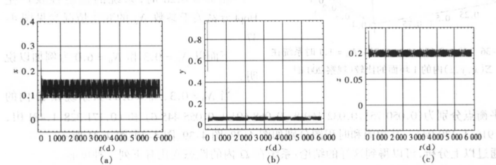


图4-34　$a=0.28, N_0=0.6$ 时系统的 $x(t), y(t), z(t)$ 浓度(密度)的时程图（3 000 d）

(a) $x(t)$ 浓度的时程图；(b) $y(t)$ 浓度的时程图；(c) $z(t)$ 浓度的时程图

35)可知,$x(t)$、$y(t)$、$z(t)$浓度(密度)处于一种无限振荡之中,且振幅几乎皆保持不变,这正是图 4-33 中两幅相图几乎一样的原因。

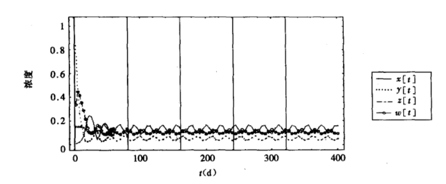


图 4-35 $a = 0.28$, $N_0 = 0.6$ 时系统各类物质浓度的时程图 (200 d)

通过以上分析可知,在 Hopf 分岔参数区域 *HBP* 内部存在着丰富的分岔行为。

在初值相同的条件下,比较 $N_0 = 0.578$、$N_0 = 0.734$ 及 $N_0 = 1.1$ 三种情况下观察 200 d 所得到的相图(见图 4-36),得出如下结论。

极限环面的旋转方向与 N_0 的取值有关,极限环面投影在 $\Sigma(x, y, z)$上的 1 环面内径在 $N_0 < 0.734$ 时,随着 N_0 的增加而增大,大约在 $N_0 = 0.734$ 附近达到最大,此后在 $N_0 > 0.734$ 时随着 N_0 的增加而减小。而环面所围绕的不稳定平衡点的位置也随着 N_0 的改变有所变化。但当 $N_0 \in HBP$ 时,系统在 $\Sigma(x, y, z)$皆存在稳定的 1 环面,相应地在 Ω 内为稳定的四维 Hopf 分岔。

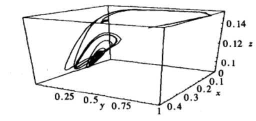


图 4-36 $N_0 = 0.578$、$N_0 = 0.734$、$N_0 = 1.1$ 时系统在 $\Sigma(x, y, z)$内的 1 环面的比较(观察 200 d)

图 4-36 中的 3 个 1 环面由下向上依次为 $N_0 = 0.578$、$N_0 = 0.734$、$N_0 = 1.1$ 在相同的初值{0.4,0.9,15,0,0.08}条件下计算出的系统在 $\Sigma(x, y, z)$内的 1 环面。

在 $a = 0.28$ 时,系统的稳定性及产生 Hopf 分岔关于参数 N_0 的变化情况参见图 4-37。

下面以 $N_0 = 0.3$ 和 $N_0 = 6.0$ 为例加以说明。

当 $N_0 = 0.3$、$N_0 = 6.0$ 时,系统在 Ω 内的稳定平衡点分别为(0.050 751,0.032 169 8 ,0.068 691 1,0.055 445 6) 和 (0.171 328,1.481 01, 0.149 916,1.130 04)。其相图和时程图分别如图 4-38、图 4-39、图 4-40、图 4-41 所示。

通过以上分析,可以得到这样的结论:系统在 Ω 内的性态变化有下列三种可能。

①趋向于稳定的平衡点;

②趋向于稳定的极限环面(Hopf 分岔);

③趋向于域 Ω 外的平衡点。

无论哪种情况发生,系统内的各类物质的浓度都不会有暴发性增长。当然在系统汇(Ω

内或外)藻类浓度 $y(t)$ 的值随着 a、N_0 的增大而增长，何时会发生赤潮，要看赤潮出现所需藻类浓度的阈值。

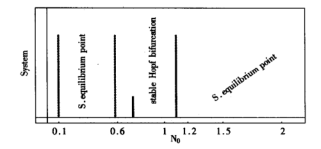


图 4-37　$a=0.28$ 时确定系统稳定性分岔及 Hopf 分岔的参数值

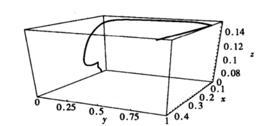


图 4-38　$a=0.28, N_0=0.3$ 时系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内相应平衡点附近的相图

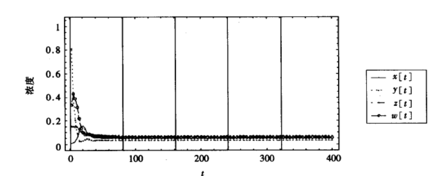


图 4-39　$a=0.28, N_0=0.3$ 时系统各类物质浓度变化的时程图

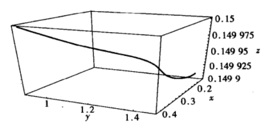


图 4-40 $a=0.28, N_0=6.0$ 时系统在域 $\Sigma(x, y, z)$ 内相应平衡点附近的相图

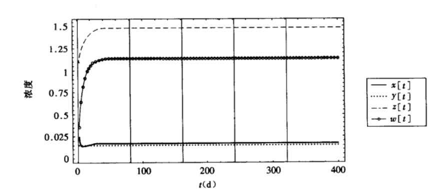


图 4-41 $a=0.28, N_0=6.0$ 时系统各类物质浓度变化的时程图

第 5 章　赤潮非线性随机动力学

本章运用非线性随机动力学理论研究了多种群赤潮藻类和赤潮食物链生态模型的稳定性及分岔行为，揭示了随机扰动对于赤潮形成的影响机制。

5.1　多种群赤潮藻类的非线性随机动力学

5.1.1　多种群赤潮藻类的非线性随机动力学模型的建立

海洋富营养化是导致赤潮暴发的基本条件。赤潮藻类之间也存在复杂的相互影响与作用，分析这些影响与作用对于阐明赤潮发生机理有重要意义。在此选取典型赤潮藻类——硅藻和甲藻，在海洋富营养化的条件下，考虑两种藻类之间的相互作用及浮游动物的捕食，建立模型如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt} &= P_1(\varepsilon_1 - a_{11}P_1 - a_{12}P_2 - a_{13}Z)\\ \frac{dP_2}{dt} &= P_2(\varepsilon_2 - a_{21}P_1 - a_{22}P_2 - a_{23}Z)\\ \frac{dZ}{dt} &= Z(-\varepsilon_3 + a_{31}P_1 + a_{32}P_2)\end{aligned}\right\} \tag{5-1}$$

其中，P_1、P_2、Z 分别代表硅藻、甲藻及浮游动物的密度；$\varepsilon_i(i=1,2)$代表两种藻类的内禀增长率；ε_3 代表浮游动物的死亡率；$a_{ii}(i=1,2)$表示藻类密度制约系数；a_{12}及 a_{21}分别表示两种藻类之间的相互作用系数，二者之和($a_{12}+a_{21}$)表示藻类间的作用率；a_{13}、a_{23}、a_{31}、a_{32}则表示浮游动物与藻类之间的捕食关系。

现实世界的环境是受到多种随机因素的作用与干扰的，海洋赤潮的发生当然也不例外。考虑到海洋及海水区域中硅藻、甲藻及浮游动物的密度变化受到光照、水温、海潮、台风、海啸以及人类活动等多种随机因素的干扰，所以在模型式(5-1)中加入随机项是必要而合理的。

在模型中，由

$$\frac{dZ}{dt} = Z(-\varepsilon_3 + a_{31}P_1 + a_{32}P_2)$$

可得浮游动物作为捕食者的密度 Z 可视为硅藻、甲藻密度的函数，即有

$$Z = C\exp\left(\int(-\varepsilon_3 + a_{31}P_1 + a_{32}P_2)dt\right) \tag{5-2}$$

其中 $C\geqslant 0$。

所以应当主要考虑随机因素对硅藻和甲藻密度的作用，而在分析浮游动物密度 Z 时随机因素的作用也得到了体现。

下面建立关于硅藻和甲藻密度的二维随机动力学模型。

由式 5-1、式 5-2 可知 Z 可视为P_1、P_2 的函数，即有 $Z=Z(P_1,P_2)$，进一步假设

$$Z = b^0 + b_{10}^1P_1 + b_{01}^1P_2 + b_{20}^2P_1^2 + b_{11}^2P_1P_2 + b_{02}^2P_2^2 + O(P_1,P_2)^3$$

其中 $O(P_1,P_2)^3$ 表示 P_1、P_2 的次数≥3 的各次项，P_1、P_2 满足下式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt}&=(\varepsilon_1-a_{13}b^0)P_1-(a_{11}+a_{13}b_{10}^1)P_1^2-(a_{12}+a_{13}b_{01}^1)P_1P_2-\\&\quad a_{13}P_1(b_{20}^2P_1^2+b_{11}^2P_1P_2+b_{02}^2P_2^2)+O(P_1,P_2)^4\\\frac{dP_2}{dt}&=(\varepsilon_2-a_{23}b^0)P_2-(a_{21}+a_{23}b_{10}^1)P_1P_2-(a_{22}+a_{23}b_{01}^1)P_2^2-\\&\quad a_{23}P_2(b_{20}^2P_1^2+b_{11}^2P_1P_2+b_{02}^2P_2^2)+O(P_1,P_2)^4\end{aligned}\right\}\tag{5-3}$$

本节所采用的参数记法如下：

$$\varepsilon_1-a_{13}b^0=\varepsilon_2-a_{23}b^0=\varepsilon$$

$$a_{11}+a_{13}b_{10}^1=a,\quad a_{22}+a_{23}b_{01}^1=b$$

$$a_{12}+a_{13}b_{01}^1=\alpha,\quad a_{21}+a_{23}b_{10}^1=\beta$$

其中参数值皆非负。

将系统式(5-3)改写为如下随机非线性动力系统(Stratonovich 意义下)：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt}&=\varepsilon P_1-aP_1^2-\alpha P_1P_2+\alpha_1P_1\xi(t)+\beta_1\eta(t)\\\frac{dP_2}{dt}&=\varepsilon P_2-\beta P_1^2-bP_2^2+\alpha_2P_2\xi(t)+\beta_2\eta(t)\end{aligned}\right\}\tag{5-4}$$

从实际意义的角度，ε 仍可视为两种藻类的内禀增长率；a、b 表示藻类密度制约系数；α 及 β 分别表示两种藻类之间的相互作用系数，二者之和($\alpha+\beta$)表示藻类间的作用率；硅藻和甲藻受到的乘性随机激励为 $\xi(t)$(与环境及自身浓度等内在因素有关)，另外受到的直接影响浓度变化的外界随机激励为 $\eta(t)$。为便于研究，假设 $\xi(t)$ 与 $\eta(t)$ 为独立的具有零均值和标准方差的 Gauss 白噪声，即

$$E[\xi(t)]=E[\eta(t)]=0,\quad E[\xi(t)\xi(t+\tau)]=\delta(\tau)$$

$$E[\eta(t)\eta(t+\tau)]=\delta(\tau),\quad E[\xi(t)\eta(t+\tau)]=0$$

系统式(5-4)为物理意义下的随机微分动力系统(Stratonovich 意义下的随机微分方程)，其中 $\delta(x)$ 为 Dirac 函数，方程(5-4)的各项系数皆非负。

5.1.2　非线性随机动力学模型的随机平均系统

当系统式(5-4)未受到随机激励时，即 $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0$ 时，其对应的确定系统有 4 个平衡点，即 $Q_0(0,0)$，$Q_1\left(\frac{\varepsilon}{a},0\right)$，$Q_2\left(0,\frac{\varepsilon}{b}\right)$，$Q_3\left(\frac{(b-\alpha)\varepsilon}{ab-\alpha\beta},\frac{(a-\beta)\varepsilon}{ab-\alpha\beta}\right)$。各点的坐标应为非负数，所对应的 Jacobi 矩阵的特征值如表 5-1 所示。

表 5-1　系统式(5-4)对应的确定系统的平衡点

平衡点	特征值	稳定性
$Q_0(0,0)$	ε,ε	不稳定
$Q_1\left(\frac{\varepsilon}{a},0\right)$	$-\varepsilon,\frac{(a-\beta)\varepsilon}{a}$	$a>\beta$，不稳定
		$a<\beta$，稳定

续表

平衡点	特征值	稳定性
$Q_2\left(0,\frac{\varepsilon}{b}\right)$	$-\varepsilon,\frac{(b-a)\varepsilon}{b}$	$b>\alpha$,不稳定
		$b<\alpha$,稳定
$Q_3\left(\frac{(b-\alpha)\varepsilon}{ab-\alpha\beta},\frac{(a-\beta)\varepsilon}{ab-\alpha\beta}\right)$	$-\varepsilon,\frac{(b-\alpha)(b-\beta)\varepsilon}{-(ab-\alpha\beta)}$	$a>\beta$ 且 $b>\alpha$,稳定
		其他情况,需进一步分析

注:$a=\beta$ 时,$Q_3\left(\frac{(b-\alpha)\varepsilon}{ab-\alpha\beta},\frac{(a-\beta)\varepsilon}{ab-\alpha\beta}\right)$ 与 $Q_1\left(\frac{\varepsilon}{a},0\right)$ 重合;$b=\alpha$ 时,$Q_3\left(\frac{(b-\alpha)\varepsilon}{ab-\alpha\beta},\frac{(a-\beta)\varepsilon}{ab-\alpha\beta}\right)$ 与 $Q_2\left(0,\frac{\varepsilon}{b}\right)$ 重合。

由表 5-4 可知:

当 $a<\beta$ 而 $b>\alpha$,且 $ab>\alpha\beta$ 时,则有唯一稳定平衡点 $Q_1\left(\frac{\varepsilon}{a},0\right)$;

当 $a>\beta$ 而 $b<\alpha$,且 $ab>\alpha\beta$ 时,则有唯一稳定平衡点 $Q_2\left(0,\frac{\varepsilon}{b}\right)$;

当 $a=\beta$ 且 $b=\alpha$ 时,由系统可推出 $P_2=cP_1$(c 为常数),即可视为单种群问题。

而对于非线性随机动力系统式(5-4),其随机项的作用是使平衡点的稳定性发生改变,分岔值发生漂移,即随机系统稳态解会有不同的稳定性与分岔。

无论平衡点 Q_3 是否稳定,其稳定性的变化是具代表性的。下面先分析系统式(5-4)在平衡点 Q_3 附近的随机稳定性与随机分岔。

假设 $a>\beta,b>\alpha$,令

$$y_1=P_1-\frac{(b-\alpha)\varepsilon}{ab-\alpha\beta},\quad y_2=P_2-\frac{(a-\beta)\varepsilon}{ab-\alpha\beta},\quad \boldsymbol{Y}=[y_1\quad y_2]^{\mathrm{T}}$$

代入式(5-4)可得系统的扰动方程为

$$\dot{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{AY}+f(\boldsymbol{Y},\xi(t),\eta(t)) \tag{5-5}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\frac{\varepsilon}{D}\begin{bmatrix}a(\alpha-b) & \alpha(\alpha-b)\\ \beta(\beta-a) & b(\beta-a)\end{bmatrix}$,$D=ab-\alpha\beta$。

研究系统式(5-4)在 Q_3 处的稳定性转化为研究式(5-5)在 $O(0,0)$ 处的稳定性问题。

设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PX},\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{b-\alpha}{a-\beta} & \frac{-\alpha}{\beta}\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

代入式(5-5)可得

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APX}+\boldsymbol{P}^{-1}f(\boldsymbol{PX},\xi(t),\eta(t))$$

即得如下系统:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=a_1x_1-a_{11}x_1^2-a_{12}x_2^2+(k_{10}+k_{11}x_1+k_{12}x_2)\xi(t)+r_1\eta(t)\\ \dot{x}_2&=a_2x_2-a_{21}x_1x_2-a_{22}x_2^2+(k_{20}+k_{21}x_1+k_{22}x_2)\xi(t)+r_2\eta(t)\end{aligned}\right\} \tag{5-6}$$

在不与式(5-3)中系数记法发生混淆的情况下,不妨采用如下记法:

$a_1=-\varepsilon,\quad a_{11}=(a-\beta)^{-1}D,\quad a_{12}=\alpha(a-\beta)\beta^{-1}$

$a_2=-(b-\alpha)(a-\beta)\varepsilon D^{-1},\quad a_{21}=(a-\beta)^{-1}(2ab-a\alpha-b\beta),\quad a_{22}=(b\beta-a\alpha)\beta^{-1}$

$U=a\alpha+b\beta-2\alpha\beta$

$$k_{10}=(a-\beta)[(b-\alpha)\beta\alpha_1+(a-\beta)\alpha\alpha_2]\varepsilon D^{-1}U^{-1}$$

$$k_{11}=[(b-\alpha)\beta\alpha_1+(a-\beta)\alpha\alpha_2]U^{-1},\quad k_{12}=\alpha(a-\beta)(\alpha_2-\alpha_1)U^{-1}$$

$$k_{20}=(b-\alpha)(a-\beta)(\alpha_2-\alpha_1)U^{-1}D^{-1}\beta\varepsilon,\quad k_{21}=(b-\alpha)(\alpha_2-\alpha_1)U^{-1}\beta$$

$$k_{22}=[(b-\alpha)\beta\alpha_2+(a-\beta)\alpha\alpha_1]U^{-1}$$

$$r_1=(\beta\beta_1+\alpha\beta_2)(a-\beta)U^{-1},r_2=((b-\alpha)\beta_2-(a-\beta)\beta_1)\beta U^{-1}$$

作如下坐标变换：

$$x_1=a\cos\theta,\quad x_2=a\sin\theta$$

对系统式(5-6)进行变量代换，可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=&-a^2[a_{11}\cos^3\theta+(a_{12}+a_{21})\cos\theta\sin^2\theta+a_{22}\sin^3\theta]+a(a_1\cos^2\theta+a_2\sin^2\theta)+\\&[k_{10}\cos\theta+k_{20}\sin\theta+a(k_{11}\cos^2\theta+(k_{12}+k_{21})\cos\theta\sin\theta+k_{22}\sin^2\theta)]\xi(t)+\\&(r_1\cos\theta+r_2\sin\theta)\eta(t)\\\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=&(a_2-a_1)\cos\theta\sin\theta+a[a_{12}\sin^3\theta-a_{22}\cos\theta\sin^2\theta+(a_{12}-a_{21})\cos^2\theta\sin\theta]+\\&[k_{21}\cos^2\theta+(k_{22}-k_{11})\cos\theta\sin\theta-k_{12}\sin^2\theta+\frac{1}{a}(k_{20}\cos\theta-k_{10}\sin\theta)]\xi(t)+\\&\frac{1}{a}(r_2\cos\theta-r_1\sin\theta)\eta(t)\end{aligned}\right\}\tag{5-7}$$

目前尚无可行的方法直接计算出系统式(5-7)的精确解。在系统所受到的随机激励的强度较小时(即系统式(5-4)中的 α_1、α_2、β_1、β_2 充分小)，根据 Khasminskii 极限定理可知，系统式(5-7)的响应过程$\{a(t),\theta(t)\}$弱收敛于一个二维 Markov 扩散过程。对系统式(5-7)应用随机平均法可得到以下扩散过程(Ito 随机微分方程)：

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}a&=m_a\mathrm{d}t+\sigma_{11}\mathrm{d}W_a+\sigma_{12}\mathrm{d}W_\theta\\\mathrm{d}\theta&=m_\theta\mathrm{d}t+\sigma_{21}\mathrm{d}W_a+\sigma_{22}\mathrm{d}W_\theta\end{aligned}\right\}\tag{5-8}$$

其中$\begin{bmatrix}m_a\\m_\theta\end{bmatrix}$为漂移系数向量，$\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}\end{bmatrix}$是扩散系数矩阵，$W_a(t)$、$W_\theta(t)$为相互独立的标准 Wiener 过程。

系统式 (5-8) 的各项系数为

$$m_a=\frac{a}{2}(a_1+a_2)+\frac{a}{8}(5k_{11}^2+5k_{22}^2+3k_{12}^2+3k_{21}^2+6k_{12}k_{21}-2k_{11}k_{22})+\frac{1}{2a}(k_{10}^2+k_{20}^2+r_1^2+r_2^2)$$

$$m_\theta=0$$

$$\sigma_{11}^2=\frac{a^2}{8}(3k_{11}^2+3k_{22}^2+k_{12}^2+k_{21}^2+2k_{12}k_{21}+2k_{11}k_{22})+\frac{1}{2}(k_{10}^2+k_{20}^2+r_1^2r_2^2)$$

$$\sigma_{12}^2=\sigma_{21}^2=\frac{a}{4}(k_{11}+k_{22})(k_{21}-k_{12})$$

$$\sigma_{22}^2=\frac{1}{8}(k_{11}^2+k_{22}^2+3k_{12}^2+3k_{21}^2-2k_{12}k_{21}-2k_{11}k_{22})+\frac{1}{2a^2}(k_{10}^2+k_{20}^2+r_1^2+r_2^2)$$

所以由式(5-8)中扩散系数矩阵的情况可知，当 $\sigma_{12}^2=\sigma_{21}^2=0$ 时，即 $k_{11}+k_{22}=0$ 或 $k_{21}-k_{12}=0$ 时，平均振幅 $a(t)$ 为一个一维 Markov 扩散过程

$$da = m_a dt + \sigma_{11} dW_a$$

将其改写为

$$da = \left[\left(\mu_1+\frac{\mu_2}{8}\right)a+\frac{\mu_3}{a}\right]dt+\left(\mu_3+\frac{\mu_4}{8}a^2\right)^{\frac{1}{2}}dW_a \tag{5-9}$$

其中

$$\mu_1=\frac{1}{2}(a_1+a_2),\quad \mu_2=5k_{11}^2+5k_{22}^2+3k_{12}^2+3k_{21}^2+6k_{12}k_{21}-2k_{11}k_{22}$$

$$\mu_3=\frac{1}{2}(k_{10}^2+k_{20}^2+r_1^2+r_2^2),\quad \mu_4=3k_{11}^2+3k_{22}^2+k_{12}^2+k_{21}^2+2k_{12}k_{21}+2k_{11}k_{22}$$

对于确定系统，平衡点 Q_3 附近的稳定性取决于 $a>\beta$ 且 $b>\alpha$ 是否成立。而对于随机动力系统，在此要先分析平均振幅扩散过程 $a(t)$ 在奇异边界 $a=0$ 处的样本轨线的概率意义上稳定性的变化，然后再来得到参数空间的随机分岔点。

5.1.3 以扩散过程边界理论分析随机平均系统性态

分析一维扩散过程式(5-9)在区间 $[0,+\infty)$ 上的解过程的性态。

1. 系统在 $\mu_3=0$ 时的性态分析

当 $\mu_3=0$ 时，系统化为

$$da=\left[\left(\mu_1+\frac{\mu_2}{8}\right)a\right]dt+\left(\frac{\mu_4}{8}a^2\right)^{\frac{1}{2}}dW_a \tag{5-10}$$

在 $a=0$ 时，$\sigma_{11}=0$，所以 $a=0$ 为系统式(5-10)的第一类奇异边界；

在 $a=+\infty$ 时，$m_a=\infty$，所以 $a=+\infty$ 为系统式(5-10)的第二类奇异边界。

根据奇异边界理论可计算出第一类奇异边界 $a=0$ 的扩散指数、漂移指数和特征值分别为

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1=2\\&\beta_1=1\\&c_1=\lim_{a\to0^+}\frac{2m_a(a-0)^{\alpha_1-\beta_1}}{\sigma_{11}^2}=\lim_{a\to0^+}\frac{2\left(\mu_1+\frac{\mu_2}{8}\right)a^2}{\frac{\mu_4}{8}a^2}=\frac{2(8\mu_1+\mu_2)}{\mu_4}\end{aligned}\right\} \tag{5-11}$$

所以，当 $c_1>1$，即 $\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}>\frac{1}{2}$ 时，边界 $a=0$ 为排斥自然边界；

当 $c_1<1$，即 $\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}<\frac{1}{2}$ 时，边界 $a=0$ 为吸引自然边界；

当 $c_1=1$，即 $\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}=\frac{1}{2}$ 时，边界 $a=0$ 为严格自然边界。

对于第二类奇异边界 $a=+\infty$，可以计算出扩散指数、漂移指数和特征值分别为

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_r=2\\&\beta_r=1\\&c_r=-\lim_{a\to+\infty}\frac{2m_a a^{\alpha_r-\beta_r}}{\sigma_{11}^2}=-\lim_{a\to+\infty}\frac{2\left(\mu_1+\frac{\mu_2}{8}\right)a^2}{\frac{\mu_4}{8}a^2}=-\frac{2(8\mu_1+\mu_2)}{\mu_4}\end{aligned}\right\}\tag{5-12}$$

所以,当 $c_r>-1$,即$\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}<\frac{1}{2}$时,边界 $a=+\infty$ 为排斥自然边界;

当 $c_r<-1$,即$\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}>\frac{1}{2}$时,边界 $a=+\infty$ 为吸引自然边界;

当 $c_r=-1$,即$\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}=\frac{1}{2}$时,边界 $a=+\infty$ 为严格自然边界。

综上所述,可得到以下结论。

①当$\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}<\frac{1}{2}$时,$a=0$ 为吸引自然边界,$a=+\infty$ 为排斥自然边界,所以平凡解 $a=0$ 为稳定的,即随机系统在平衡点 Q_3 为稳定的。这说明原确定系统在平衡点的稳定性,经过随机激励(扰动)后,可能仍具有以概率意义的稳定性。

②当$\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}>\frac{1}{2}$时,$a=0$ 为排斥自然边界,$a=+\infty$ 为吸引自然边界,所以平凡解 $a=0$ 为不稳定的,即随机系统在平衡点 Q_3 是不稳定的。这说明原确定系统在平衡点的稳定性,经过随机激励(扰动)后,失去了以概率意义的稳定性。

③当$\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}=\frac{1}{2}$时,$a=0$,$a=+\infty$ 皆为严格自然边界,此种情况恰好为稳定与否的分界线。

前文曾提及,$\frac{\beta}{a}$与$\frac{\alpha}{b}$是否同时为 1,可以视为确定系统在平衡点稳定性的分岔值,此处 $16\mu_1+2\mu_2-\mu_4$ 是否为零,可以视为随机激励系统在平衡点稳定性的分岔值。

2. 系统在 $\mu_3\neq0$ 时的性态分析

当 $\mu_3\neq0$ 时,分析系统式(5-9)可得:

在 $a=0$ 时,$\sigma_{11}\neq0$,所以 $a=0$ 为系统式(5-9)的非奇异边界,经过计算可判断出,$a=0$ 为规则边界(可达到的);

根据奇异边界理论可计算出第一类边界 $a=0$ 的扩散指数、漂移指数和特征值分别为在 $a=+\infty$ 时,$m_a=\infty$,所以 $a=+\infty$ 为系统式(5-9)的第二类奇异边界。

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_r=2\\&\beta_r=1\\&c_r=-\lim_{a\to+\infty}\frac{2m_a a^{\alpha_r-\beta_r}}{\sigma_{11}^2}=-\lim_{a\to+\infty}\frac{2\left[\left(\mu_1+\frac{\mu_2}{8}\right)a+\frac{\mu_3}{a}\right]a}{\left(\mu_3+\frac{\mu_4}{8}a^2\right)}=-\frac{2(8\mu_1+\mu_2)}{\mu_4}\end{aligned}\right\}\tag{5-13}$$

所以,当 $c_r>-1$,即$\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}<\frac{1}{2}$时,边界 $a=+\infty$ 为排斥自然边界;

当 $c_r < -1$，即$\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4} > \frac{1}{2}$时，边界 $a=+\infty$ 为吸引自然边界；

当 $c_r = -1$，即$\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4} = \frac{1}{2}$时，边界 $a=+\infty$ 为严格自然边界。

对于边界 $a=0$，过程既可以从内部到达边界，也可以从边界进入内部。结合边界 $a=+\infty$ 的情况可得结论：平凡解 $a=0$ 为不稳定的，即随机系统在平衡点 Q_3 是不稳定的，无论原来确定系统在平衡点 Q_3 是否稳定。

3.综合分析

综合前面两类情况（$\mu_3 \neq 0, \mu_3 = 0$），可得以下结论。

①当$\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4} > \frac{1}{2}$时，边界 $a=+\infty$ 为吸引自然边界，系统以概率意义不稳定。从概率意义分析，在 Q_3 附近几乎不可能产生 Hopf 分岔。

②当$\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4} < \frac{1}{2}$时，边界 $a=+\infty$ 为排斥自然边界。

③若 $\mu_3=0$，边界 $a=0$ 为吸引自然边界，系统在 Q_3 处以概率意义稳定；若 $\mu_3 \neq 0$，边界 $a=0$ 为规则的，随机动力系统在 Q_3 处以概率意义不稳定。

是否会在 Q_3 附近产生随机 Hopf 分岔，是下一节要分析的问题。

5.1.4　随机系统的随机 Hopf 分岔

在研究非线性随机动力系统分岔问题时，常用的方法之一就是计算不变测度的极值。不变测度是随机分岔的一个重要的特征量。

由振幅 $a(t)$ 的 Ito 随机微分方程（式(5-9)）可得 FPK 方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a}\left\{\left[\left(\mu_1+\frac{\mu_2}{8}\right)a+\frac{\mu_3}{a}\right]p\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[\left(\mu_3+\frac{\mu_4}{8}a^2\right)p\right] \tag{5-14}$$

及其初值条件

$$p(a,t\mid a_0,t_0) \to \delta(a-a_0), \quad t\to t_0 \tag{5-15}$$

其中 $p(a,t\mid a_0,t_0)$ 为扩散过程 $a(t)$ 的转移概率密度函数。而扩散过程 $a(t)$ 的不变测度为其平稳概率密度函数 $p_{st}(a)$，该函数为下面退化 FPK 方程的解。

$$-\frac{\partial}{\partial a}\left\{\left[\left(\mu_1+\frac{\mu_2}{8}\right)a+\frac{\mu_3}{a}\right]p\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[\left(\mu_3+\frac{\mu_4}{8}a^2\right)p\right]=0 \tag{5-16}$$

通过计算可得

$$p_{st}(a) = 8\sqrt{\frac{2}{\pi}}2^{-3v}\mu_3^{2-v}\left(\frac{\mu_4}{\mu_3}\right)^{\frac{3}{2}}\Gamma(2-v)\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}-v\right)\right)^{-1}a^2(\mu_4a^2+8\mu_3)^{v-2} \tag{5-17}$$

其中 v 及伽玛函数 $\Gamma(x)$ 分别为

$$v=\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}, \quad \Gamma(x)=\int_0^x t^{x-1}e^{-1}dt$$

分析平稳概率密度函数 $p_{st}(a)$ 在不同参数下的形态，$p_{st}(a)$ 中涉及参数有 μ_1、μ_2、μ_3、μ_4，由前面的假设可知：$\mu_1<0, \mu_3>0, \mu_2>\mu_4>0$。

根据 Namachivaya 的理论，不变测度的极值包含非线性随机系统稳态行为的“最本质”的信

息，即包含了非线性随机动力系统的稳态特征信息。当噪声的强度趋于零时，$p_{st}(a)$的极值趋近于表现确定系统的稳态行为。若系统响应 $a(t)$为遍历的过程，根据 Oseledec 的遍历理论，$p_{st}(a)$亦可视为样本轨线在 a 的邻域内访问时间的度量。

若 $p_{st}(a)$在 a^* 取得极大值，则轨线在 a^* 处(邻域)内停留时间较长，即 a^* 为以概率意义为稳定的；极小值的情况恰好相反。

下面计算系统的最大可能振幅 a^*，即要求 $p_{st}(a^*)$应为 $p_{st}(a)$的极大值，从而有

$$\left.\frac{\mathrm{d}p_{st}(a)}{\mathrm{d}a}\right|_{a=a^*}=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2p_{st}(a)}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=a^*}<0$$

可以计算出

$$a=0\text{ 或 }a=\tilde{a}=\sqrt{\frac{-8\mu_3}{8\mu_1+\mu_2-\mu_4}}\left(\text{因为}\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}<\frac{1}{2}\right)$$

进一步计算得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2p_{st}(a)}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=0}=2^{7+3(8\mu_1+\mu_2-4\mu_4)\mu_4^{-1}}\mu_3^{2+(8\mu_1+\mu_2-4\mu_4)\mu_4^{-1}}>0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2p_{st}(a)}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=\tilde{a}}=\frac{(8\mu_1+\mu_2-\mu_4)^2\left(8\mu_3-\dfrac{8\mu_3\mu_4}{8\mu_1+\mu_2-\mu_4}\right)^{\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}}}{-16\mu_3^2(8\mu_1+\mu_2-2\mu_4)^2}<0$$

所以要求的 $a^*=\tilde{a}$。

在 $a=0$ 处 $p_{st}(a)$应取得极小值，这说明系统经随机激励后，在原平衡点处几乎肯定不稳定，与前文分析边界所得的结论完全一致。

而在 $a=\tilde{a}$ 处$p_{st}(a)$取得极大值，即原非线性随机动力系统产生随机 Hopf 分岔：

$$x_1^2+x_2^2=\frac{-8\mu_3}{8\mu_1+\mu_2-\mu_4}(\text{即 }a=\tilde{a})\tag{5-18}$$

若在相空间中加以绘制，则会出现最大可能意义下的一个“颜色最深”的极限环。

根据前面对系统中参数的要求，取如下数值绘制 $p_{st}(a)$的图形。

条件 1　$\mu_1=-0.4,\quad \mu_2=3,\quad \mu_3=0.05,\quad \mu_4=2.4$

条件 2　$\mu_1=-0.4,\quad \mu_2=3,\quad \mu_3=0.1,\quad \mu_4=2.4$

条件 3　$\mu_1=-0.4,\quad \mu_2=3,\quad \mu_3=0.15,\quad \mu_4=2.4$

条件 4　$\mu_1=-0.4,\quad \mu_2=3,\quad \mu_3=0.2,\quad \mu_4=2.4$

图 5-1 中曲线从左至右依次为条件 1、条件 2、条件 3、条件 4 对应的曲线。而通过不变测度计算出的概率意义上的随机 Hopf 分岔值($\tilde{a}$)及 $p_{st}(\tilde{a})$如下表 5-2 所示。

表 5-2　随机 Hopf 分岔值

参数值	条件 1	条件 2	条件 3	条件 4
$a=\tilde{a}$	0.392 232	0.554 700	0.679 366	0.784 465
$p_{st}(\tilde{a})$	0.887 301	0.627 417	0.512 284	0.443 651

这里要考虑的问题是，在系统中的随机激励作用显著增大时，随机动力系统的性态是怎样

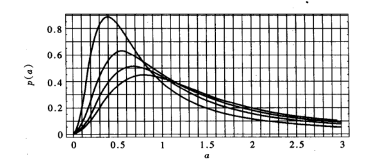


图 5-1　$\mu_1=-0.4,\mu_2=3,\mu_4=2.4,\mu_3=0.05,0.1,0.15,0.2$ 时稳态概率密度函数及随机 Hopf 分岔位置

的变化趋势。可以考虑增大 $\mu_3\left(因\ \mu_3=\frac{1}{2}(k_{10}^2+k_{20}^2+r_1^2+r_2^2)\right)$ 的值,并观察系统的不变测度的变化情况。

图 5-2 中曲线从左至右依次为条件 1、条件 2、条件 3、条件 4 对应的曲线。而通过不变测度计算出的概率意义上的随机 Hopf 分岔值($\bar{a}$)及 $p_{st}(\bar{a})$如下表 5-3 所示。在 $\mu_1=-0.4,\mu_2=3,\mu_4=2.4$ 的前提下,$\mu_3=1$、1.333、1.666、1.999 6。

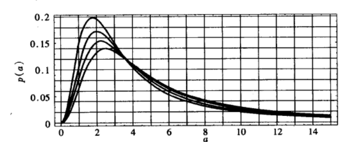


图 5-2　$\mu_1=-0.4,\mu_2=3,\mu_4=2.4,\mu_3=1$、1.333、1.666、1.999 6 时稳态概率密度函数及随机 Hopf 分岔位置

表 5-3　随机 Hopf 分岔值

参数值	$\mu_3=1$	$\mu_3=1.333$	$\mu_3=1.666$	$\mu_3=1.999\ 6$
$a=\bar{a}$	1.754 12	2.025 38	2.264 37	2.480 45
$p_{st}(\bar{a})$	0.198 407	0.171 834	0.153 697	0.140 309

可以看出,该图形象地说明用不变测度理论得到的结论是正确的,并对以概率意义上产生的随机 Hopf 分岔作出了形象说明。

值得提出的问题是使用原始系统中系数的计算随机 Hopf 分岔。在此前所举计算实例中,皆以随机平均后的系统计算,在实际问题中若已知的是原始参数,则需通过相应的计算得到随机系统中的各项参数。

例如:系统式(5-4)中的系数取值为

$$\varepsilon=0.8,a=0.6,b=0.5,\alpha=0.4,\beta=0.1,\alpha_1=0.6,\beta_1=0.3,\alpha_2=0.6,\beta_2=0.1$$

则可计算得到

$$\mu_1=-0.476\ 923,\mu_2=2.88,\mu_3=0.442\ 147,\mu_4=2.88,\mu_5=\mu_6=0$$

$$v=\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}=-0.324\ 786<\frac{1}{2}$$

并得到相应的稳态概率密度函数

$$p(a)=\frac{32.567a^2}{(3.537\ 17+2.88a^2)^{2.324\ 79}}$$

而且有 $\tilde{a}=0.960\ 531$，如图 5-3 所示。

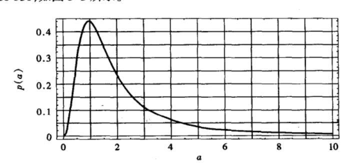


图 5-3 $\mu_1=-0.476\ 923,\mu_2=2.88,\mu_3=0.442\ 147,\mu_4=2.88,\mu_5=\mu_6=0$ 时稳态概率密度函数及随机 Hopf 分岔位置

综上所述，v 可视为随机系统稳定性的分岔参数（也可称为稳定性的阈值）；而 μ_3 可视为随机系统的随机 Hopf 分岔的参数，随着 $\mu_3>0$ 时，就可能产生以概率意义的随机 Hopf 分岔，而且分岔的位置随着 μ_3 的增大而增大，但其出现分岔的概率密度却在减小。

由于随机因素的扰动是不可避免的，所以原确定系统的平衡点的稳定性转化为随机动力系统在平衡点附近是否产生 Hopf 分岔。产生随机 Hopf 分岔的位置随着 μ_3 的增大而增大（发生漂移），若分岔位置达到了赤潮发生的阈值，则有可能（可能性的大小为发生 Hopf 分岔的概率值，见图 5-1、图 5-2、图 5-3）引发赤潮。若随机动力系统没有可能产生随机 Hopf 分岔，且边界 $a=+\infty$ 为吸引自然边界，则说明在概率意义上两种藻类的浓度（至少有一个）在一段时间内会急速增大，即说明可能会导致赤潮暴发。

5.1.5 非线性随机动力系统的 Lyapunov 指数

计算随机动力系统的 Lyapunov 指数是研究其稳定性的重要方法之一。而对于多种群赤潮藻类，非线性随机动力系统的平均振幅 $a(t)$ 为一个一维 Markov 扩散过程，即

$$\mathrm{d}a=m_a\mathrm{d}t+\sigma_{11}\mathrm{d}W_a$$

将其改写为

$$\left.\begin{aligned} da &= \left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8}\right) a + \frac{\mu_3}{a}\right] dt + \left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8} a^2\right)^{\frac{1}{2}} dW_a \\ d\theta &= \left(\frac{\mu_3}{a^2} + \frac{\mu_2 - \mu_4}{16}\right)^{\frac{1}{2}} dW_\theta \end{aligned}\right\} \tag{5-19}$$

其中 $W_a(t)$、$W_\theta(t)$为相互独立的标准 Wiener 过程，且

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \quad \mu_2 = 5k_{11}^2 + 5k_{22}^2 + 3k_{12}^2 + 3k_{21}^2 + 6k_{12}k_{21} - 2k_{11}k_{22}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{2}(k_{10}^2 + k_{20}^2 + r_1^2 + r_2^2), \quad \mu_4 = 3k_{11}^2 + 3k_{22}^2 + k_{12}^2 + k_{21}^2 + 2k_{12}k_{21} + 2k_{11}k_{22}$$

对于确定系统，平衡点 Q_3 附近的稳定性取决于 $a > \beta$ 且 $b > \alpha$ 是否成立。而对于随机系统，则可以通过计算 Lyapunov 指数分析系统(5-9)在 $a = 0$ 的稳定性。

对平均振幅扩散过程 $a(t)$，设

$$a(t) = e^{\rho}, \rho = \rho(a)$$

所以，由 Ito 随机微分法则可得

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{\partial \rho}{\partial a} da + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial a^2}\sigma_{11}^2 dt \\ &= \frac{1}{a}\left(\left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8}\right) a + \frac{\mu_3}{a}\right] dt + \left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8}a^2\right)^{\frac{1}{2}} dW_a\right) + \frac{1}{2}\frac{(-1)}{a^2}\left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8}a^2\right) dt \\ &= \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} - \frac{\mu_4}{16} + \frac{\mu_3}{2a^2}\right) dt + \frac{1}{a}\left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8}a^2\right)^{\frac{1}{2}} dW_a \end{aligned} \tag{5-20}$$

取均值可得

$$d\rho = \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} - \frac{\mu_4}{16} + E\left(\frac{\mu_3}{2a^2}\right)\right) dt \triangleq v dt \tag{5-21}$$

下面讨论系统在 $a = 0$ 处的稳定性。

当 $\mu_3 = 0$ 时，$a(t)$在 $a = 0$ 处的 Lyapunov 指数为

$$\lambda = v = \mu_1 + \frac{\mu_2}{8} - \frac{\mu_4}{16} \tag{5-22}$$

当$\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_4} < \frac{1}{2}$时，得 $\lambda < 0$，随机系统在 $a = 0$ 处为以概率意义稳定的；

当$\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_4} > \frac{1}{2}$时，得 $\lambda > 0$，随机系统在 $a = 0$ 处为以概率意义不稳定的；

而$\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_4} = \frac{1}{2}$为随机系统在 $a = 0$ 处稳定与否的分岔值。

系统的随机分岔参数可由 $\lambda = 0$ 确定，即有 $\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} - \frac{\mu_4}{16} = 0$，这与上节中由一维扩散过程边界理论所确定的分岔参数$\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_4} = \frac{1}{2}$完全一致。

通过分岔参数关系图 5-4 可以看出，当系数 μ_1、μ_2、μ_4 确定的参数 $v < 0$，此时 μ_4 在曲面的上方，且 $\mu_4 > 16\mu_1 + 2\mu_2$ 时，系统在 $a = 0$ 处为以概率意义稳定的；反之当 $\mu_4 < 16\mu_1 + 2\mu_2$ 时，系统在 $a = 0$ 处为以概率意义不稳定的。

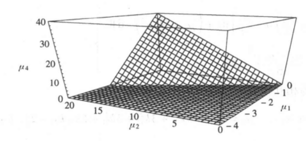


图 5-4　系统稳定性分岔参数关系图

当 $\mu_3 \neq 0$ 时，$a(t)$ 在 $a=0$ 处的 Lyapunov 指数为 $\lambda > 0$(因为 $\mu_3 > 0$)，所以随机系统在 $a=0$ 处为以概率意义不稳定的。

综合前面各节内容可以得出：讨论随机系统式(5-9)在 $a=0$ 处的稳定性时，所采用的一维扩散过程边界理论、不变测度极值理论和 Lyapunov 指数理论三种方法，得到的结论完全一致。

值得说明的是，用一维扩散过程边界理论或 Lyapunov 指数理论只判断了随机系统在 $a=0$ 处的稳定性。而在不稳定的时候，在 $a=0$ 附近是否会产生 Hopf 分岔？本节借助不变测度极值理论得到了随机系统式(5-9)发生以概率意义上的随机 Hopf 分岔的条件。

5.1.6　随机平均系统的稳态响应的概率密度函数

在第 4、5 节中所讨论的平均振幅是作为一个一维扩散过程进行的。本节要将所讨论的非线性随机动力系统经随机平均法处理后得到的平均振幅与平均角度 $(a(t), \theta(t))$ 视为一个二维 Markov 扩散过程进行分析。

对于随机动力系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1 x_1 - a_{11} x_1^2 - a_{12} x_2^2 + (k_{10} + k_{11} x_1 + k_{12} x_2)\xi(t) + r_1 \eta(t)\\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2 - a_{21} x_1 x_2 - a_{22} x_2^2 + (k_{20} + k_{21} x_1 + k_{22} x_2)\xi(t) + r_2 \eta(t)\end{aligned}\right\} \tag{5-23}$$

记平均后得到系统

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}a &= m_a \mathrm{d}t + \sigma_{11} \mathrm{d}W_a + \sigma_{12} \mathrm{d}W_\theta\\ \mathrm{d}\theta &= m_\theta \mathrm{d}t + \sigma_{21} \mathrm{d}W_a + \sigma_{22} \mathrm{d}W_\theta\end{aligned}\right\} \tag{5-24}$$

其中 $W_a(t)$、$W_\theta(t)$ 为相互独立的标准 Wiener 过程。

对于二维扩散过程，通常要考虑计算其二维转移概率密度函数。对于一般情况下计算二维转移概率密度函数尚没有普适的方法。此处所得到的系统可以采用一些技巧进行计算。

式(5-24)的各项系数为

$$\sigma_{11}^2 = \frac{a^2}{8}(3k_{11}^2 + 3k_{22}^2 + k_{12}^2 + k_{21}^2 + 2k_{12}k_{21} + 2k_{11}k_{22}) + \frac{1}{2}(k_{10}^2 + k_{20}^2 + r_1^2 + r_2^2)$$

$$\sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2 = \frac{a}{4}(k_{11} + k_{22})(k_{21} - k_{12})$$

$$\sigma_{22}^2 = \frac{1}{8}(k_{11}^2 + k_{22}^2 + 3k_{12}^2 + 3k_{21}^2 - 2k_{12}k_{21} - 2k_{11}k_{22}) + \frac{1}{2a^2}(k_{10}^2 + k_{20}^2 + r_1^2 + r_2^2)$$

$$m_a = \frac{a}{2}(a_1 + a_2) + \frac{a}{8}(5k_{11}^2 + 5k_{22}^2 + 3k_{12}^2 + 3k_{21}^2 + 6k_{12}k_{21} - 2k_{11}k_{22}) +$$

$$\frac{1}{2a}(k_{10}^2 + k_{20}^2 + r_1^2 + r_2^2)$$

$$m_\theta = 0$$

进一步设

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2),\quad \mu_2 = 5k_{11}^2 + 5k_{22}^2 + 3k_{12}^2 + 3k_{21}^2 + 6k_{12}k_{21} - 2k_{11}k_{22}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{2}(k_{10}^2 + k_{20}^2 + r_1^2 + r_2^2),\quad \mu_4 = 3k_{11}^2 + 3k_{22}^2 + k_{12}^2 + k_{21}^2 + 2k_{12}k_{21} + 2k_{11}k_{22}$$

$$\mu_5 = \frac{1}{4}(k_{11} + k_{22})(k_{21} - k_{12}),\quad \mu_6 = k_{11}^2 + k_{22}^2 + 3k_{12}^2 + 3k_{21}^2 - 2k_{12}k_{21} - 2k_{11}k_{22}$$

下面研究当 $\sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2 \neq 0$ 时,式(5-24)改写为

$$\left.\begin{aligned} da &= \left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8}\right)a + \frac{\mu_3}{a}\right]dt + \left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8}a^2\right)^{\frac{1}{2}} dW_a + (a\mu_5)^{\frac{1}{2}} dW_\theta \\ d\theta &= (a\mu_5)^{\frac{1}{2}} dW_a + \left(\frac{\mu_3}{a^2} + \frac{\mu_6}{16}\right)^{\frac{1}{2}} dW_\theta \end{aligned}\right\} \tag{5-25}$$

设系统响应的概率密度函数为 $P(a,\theta,t \mid a_0,\theta_0,t_0)$,而所关注的是稳态响应的概率密度,设 $\lim_{t\to\infty} P(a,\theta,t \mid a_0,\theta_0,t_0) = Q(a,\theta)$,则稳态概率密度函数 $Q(a,\varphi)$满足如下方程:

$$\frac{\partial(m_a Q)}{\partial a} + \frac{\partial(m_\theta Q)}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2(\sigma_{11}^2 Q)}{\partial a^2} + \frac{2\partial^2(\sigma_{12}^2 Q)}{\partial a\partial\theta} + \frac{\partial^2(\sigma_{22}^2 Q)}{\partial\theta^2}\right] \tag{5-26}$$

相应地有

$$\frac{\partial\left(\left(\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8}\right)a + \frac{\mu_3}{a}\right)Q\right)}{\partial a} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\left(\left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8}a^2\right)Q\right)}{\partial a^2} + \frac{2\partial^2(a\mu_5 Q)}{\partial a\partial\theta} + \frac{\partial^2\left(\left(\frac{\mu_3}{a^2} + \frac{\mu_6}{16}\right)Q\right)}{\partial\theta^2}\right] \tag{5-27}$$

设有参数 γ 使得下列等式成立:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a}\left[\left(\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8}\right)a + \frac{\mu_3}{a}\right)Q - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\left(\left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8}a^2\right)Q\right) - \gamma\frac{\partial(a\mu_5 Q)}{\partial\theta}\right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left(\frac{\mu_3}{a^2} + \frac{\mu_6}{16}\right)Q\right) + (\gamma - 1)\frac{\partial(a\mu_5 Q)}{\partial a}\right] \end{aligned} \tag{5-28}$$

进一步假设

$$\left(\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8}\right)a + \frac{\mu_3}{a}\right)Q - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\left(\left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8}a^2\right)Q\right) - \gamma\frac{\partial(a\mu_5 Q)}{\partial\theta} = 0 \tag{5-29}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left(\frac{\mu_3}{a^2} + \frac{\mu_6}{16}\right)Q\right) + (\gamma - 1)\frac{\partial(a\mu_5 Q)}{\partial a} = 0 \tag{5-30}$$

并设 $Q(a,\theta) = \exp(u(a,\theta))$,代入上面二式后,可求得

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} - \frac{\mu_4}{8}\right)a^2 + \mu_3\right]\left(\frac{\mu_6}{8a} + \frac{2\mu_3}{a^3}\right) - 4a\gamma(\gamma - 1)\mu_5^2}{4a^4\gamma(\gamma - 1)\mu_5^4 + \left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8}a^2\right)\left(\frac{\mu_3}{a^2} + \frac{\mu_6}{16}\right)} \tag{5-31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{(\gamma-1)a\mu_5\left[4\left(\mu_1+\frac{\mu_2}{8}\right)a+\frac{4\mu_3}{a}-\frac{a\mu_4}{2}\right]+2(\gamma-1)\left(\mu_3+\frac{\mu_4}{8}a^2\right)\mu_5}{4a^4\gamma(\gamma-1)\mu_5^4+\left(\mu_3+\frac{\mu_4}{8}a^2\right)\left(\frac{\mu_3}{a^2}+\frac{\mu_6}{16}\right)}, \tag{5-32}$$

利用可积性条件，令

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a\partial\theta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial a}$$

则可得 $\gamma=1$。

进而求得

$$u(a,\theta)=\ln a^2+\frac{1}{2}(8\mu_1+\mu_2-2\mu_4)\mu_4^{-1}\ln(\mu_4 a^2+8\mu_3)+c_1 \tag{5-33}$$

则有

$$\begin{aligned}Q(a,\theta)&=\exp(u(a,\theta))\\&=c_2\exp\left[\ln a^2+\frac{1}{2}(8\mu_1+\mu_2-2\mu_4)\mu_4^{-1}\ln(\mu_4 a^2+8\mu_3)\right]\end{aligned} \tag{5-34}$$

由归一化条件，计算出 c_2，则可得到

$$Q(a,\theta)=8\sqrt{\frac{2}{\pi}}2^{-3v}\mu_3^{2-v}\left(\frac{\mu_4}{\mu_3}\right)^{\frac{3}{2}}\Gamma(2-v)\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}-v\right)\right)^{-1}a^2(\mu_4 a^2+8\mu_3)^{v-2} \tag{5-35}$$

其中 v 及伽玛函数 $\Gamma(x)$ 分别为

$$v=\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4},\quad \Gamma(x)=\int_0^x t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

结果发现所得到的二维 Markov 过程 $(a(t),\theta(t))$ 的稳态响应的概率密度为平均振幅 $a(t)$ 的函数，而与平均角度量 $\theta(t)$ 无关。其原因为原随机动力系统的随机激励为相互独立的零均值标准 Gauss 白噪声，在经过随机平均法后，得到的随机激励仍为相互独立的标准 Wiener 过程，而平均系统的各项系数已完全与 $\theta(t)$ 无关（m_a、m_θ、σ_{11}、σ_{12}、σ_{21}、σ_{22} 皆不含 θ）。

下面阐明平稳概率密度函数是如何反映随机动力系统的随机 Hopf 分岔的。

由二维 Markov 过程 $(a(t),\theta(t))$ 的稳态响应的概率密度 $Q(a,\theta)$ 可以得到在随机平均意义下的二维过程 $(X_1(t),X_2(t))$ 的稳态响应的概率密度，$(X_1(t),X_2(t))$ 可视为原系统式(5-23)的响应过程，即 $a(t)=(X_1^2(t)+X_2^2(t))^{\frac{1}{2}}$。所以 $(X_1(t),X_2(t))$ 的稳态响应的概率密度函数为

$$\begin{aligned}P(x_1,x_2)&=Q(a,\theta)\\&=8\sqrt{\frac{2}{\pi}}2^{-3v}\mu_3^{2-\mu}\left(\frac{\mu_4}{\mu_3}\right)^{\frac{3}{2}}\Gamma(2-v)\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}-v\right)\right)^{-1}(x_1^2+x_2^2)[\mu_4(x_1^2+x_2^2)+8\mu_3]^{v-2}\end{aligned} \tag{5-36}$$

选取如下参数绘制二维稳态响应的概率密度函数 $P(x_1,x_2)$ 图形，如图 5-5、图 5-6、图 5-7 所示。

条件 1 $\mu_1=-0.4$, $\mu_2=3$, $\mu_3=0.05$, $\mu_4=2.4$

条件 2 $\mu_1=-0.4$, $\mu_2=3$, $\mu_3=0.1$, $\mu_4=2.4$

条件 3 $\mu_1=-0.4$, $\mu_2=3$, $\mu_3=0.2$, $\mu_4=2.4$

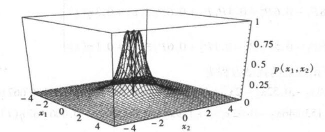


图 5-5　在 $\mu_1=-0.4,\mu_2=3,\mu_3=0.05,\mu_4=2.4$ 时稳态响应的概率密度函数

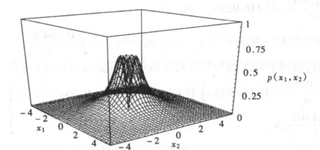


图 5-6　在 $\mu_1=-0.4,\mu_2=3,\mu_3=0.1,\mu_4=2.4$ 时稳态响应的概率密度函数

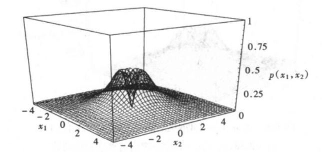


图 5-7　在 $\mu_1=-0.4,\mu_2=3,\mu_3=0.2,\mu_4=2.4$ 时稳态响应的概率密度函数

从以上图形中可以清楚地看到，在原平衡点附近会产生随机 Hopf 分岔。图中的峰值与数值模拟得到的结果是基本对应吻合的。

在原系统中取一组实际参数值计算相应的各类参数值。

设 $\varepsilon=0.8,a=0.6,b=0.5,\alpha=0.4,\beta=0.1,\alpha_1=0.6,\beta_1=0.3,\alpha_2=0.6,\beta_2=0.1$

原系统为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}t} &= 0.8P_1 - 0.6P_1^2 - 0.4P_1P_2 + 0.6P_1\xi(t) + 0.3\eta(t)\\ \frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}t} &= 0.8P_2 - 0.5P_1P_2 - 0.1P_2^2 + 0.6P_2\xi(t) + 0.1\eta(t)\end{aligned}\right\} \tag{5-37}$$

则可计算得到在平衡点处的扰动方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -0.8x_1 - 0.52x_1^2 - 2x_2^2 + (0.923\,077 + 0.6x_1)\xi(t) + 0.166\,667\eta(t)\\ \dot{x}_2 &= -0.153\,846x_2 - 0.62x_1x_2 + 1.9x_2^2 + 0.6x_2\xi(t) - 0.066\,667\eta(t)\end{aligned}\right\} \tag{5-38}$$

进而可得到

$$\mu_1 = -0.476\,923,\quad \mu_2 = 2.88,\quad \mu_3 = 0.442\,147,\quad \mu_4 = 2.88,\quad \mu_5 = \mu_6 = 0$$

且相应地有

$$m_a = \frac{0.442\,147}{a} - 0.116\,923a,\quad m_\theta = 0$$

$$\sigma_{11} = (0.447\,214\,7 + 0.36a^2)^{\frac{1}{2}},\quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0,\quad \sigma_{22} = \frac{0.664\,941}{a}$$

经过随机平均后得到平均振幅与平均角度的随机系统$(a(t),\theta(t))$为

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}a &= \left[\frac{0.442\,147}{a} - 0.116\,923a\right]\mathrm{d}t + (0.447\,214\,7 + 0.36a^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}W_a\\ \mathrm{d}\theta &= \frac{0.664\,941}{a}\mathrm{d}W_a\end{aligned}\right\} \tag{5-39}$$

绘制系统式(5-39)二维的稳态响应的概率密度函数的图形，如图 5-8 所示。

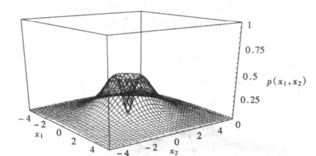


图 5-8　在 $\mu_1 = -0.476\,923, \mu_2 = 2.88, \mu_3 = 0.442\,147, \mu_4 = 2.88, \mu_5 = \mu_6 = 0$ 稳态响应的概率密度函数

5.1.7　非线性随机动力系统随机平均后的数字模拟

由随机动力系统式(5-4)得到如下二维随机动力系统：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1x_1 - a_{11}x_1^2 - a_{12}x_2^2 + (k_{10} + k_{11}x_1 + k_{12}x_2)\xi(t) + r_1\eta(t)\\ \dot{x}_2 &= a_2x_2 - a_{21}x_1x_2 - a_{22}x_2^2 + (k_{20} + k_{21}x_1 + k_{22}x_2)\xi(t) + r_2\eta(t)\end{aligned}\right\} \tag{5-40}$$

作如下坐标变换：

$$x_1 = a\cos\theta,\ x_2 = a\sin\theta$$

对系统式(5-40)进行变量代换，可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=&-a^2[a_{11}\cos^3\theta+(a_{12}+a_{21})\cos\theta\sin^2\theta+a_{22}\sin^3\theta]+a(a_1\cos^2\theta+a_2\sin^2\theta)+\\&[k_{10}\cos\theta+k_{20}\sin\theta+a(k_{11}\cos^2\theta+(k_{12}+k_{21})\cos\theta\sin\theta+k_{22}\sin^2\theta)]\xi(t)+\\&(r_1\cos\theta+r_2\sin\theta)\eta(t)\\\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=&(a_2-a_1)\cos\theta\sin\theta+a[a_{12}\sin^3\theta-a_{22}\cos\theta\sin^2\theta+(a_{11}-a_{21})\cos^2\theta\sin\theta]+\\&\left[k_{21}\cos^2\theta+(k_{22}-k_{11})\cos\theta\sin\theta-k_{12}\sin^2\theta+\frac{1}{a}(k_{20}\cos\theta-k_{10}\sin\theta)\right]\xi(t)+\\&\frac{1}{a}(r_2\cos\theta-r_1\sin\theta)\eta(t)\end{aligned}\right\}\tag{5-41}$$

当系统所受到的随机激励白噪声过程的强度充分小时，根据 Khasminskii 极限定理可知，系统式(5-40)的响应过程$\{a(t),\theta(t)\}$弱收敛于一个二维 Markov 扩散过程。对系统式(5-41)应用随机平均法可得到如下扩散过程(Ito 随机微分方程)：

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}a&=m_a\mathrm{d}t+\sigma_{11}\mathrm{d}W_a+\sigma_{12}\mathrm{d}W_\theta\\\mathrm{d}\theta&=m_\theta\mathrm{d}t+\sigma_{21}\mathrm{d}W_a+\sigma_{22}\mathrm{d}W_\theta\end{aligned}\right\}\tag{5-43}$$

其中$\begin{bmatrix}m_a\\m_\theta\end{bmatrix}$为漂移系数向量，$\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}\end{bmatrix}$是扩散系数矩阵，$W_a(t)$、$W_\theta(t)$为相互独立的 Wiener 过程。

系统式(5-43)的各项系数为

$$m_a=\frac{a}{2}(a_1+a_2)+\frac{a}{8}(5k_{11}^2+5k_{12}^2+3k_{12}^2+3k_{21}^2+6k_{12}k_{21}-2k_{11}k_{22})+\frac{1}{2a}(k_{10}^2+k_{20}^2+r_1^2+r_2^2)$$

$$m_\theta=0$$

$$\sigma_{11}^2=\frac{a^2}{8}(3k_{11}^2+3k_{22}^2+k_{12}^2+k_{21}^2+2k_{12}k_{21}+2k_{11}k_{22})+\frac{1}{2}(k_{10}^2+k_{20}^2+r_1^2+r_2^2)$$

$$\sigma_{12}^2=\sigma_{21}^2=\frac{a}{4}(k_{11}+k_{22})(k_{21}-k_{12})$$

$$\sigma_{22}^2=\frac{1}{8}(k_{11}^2+k_{22}^2+3k_{12}^2+3k_{21}^2-2k_{12}k_{21}-k_{11}k_{22})+\frac{1}{2a^2}(k_{10}^2+k_{20}^2+r_1^2+r_2^2)$$

对以上系数进行整合，引入参量$\mu_i,i=1,2,\cdots,6$，可将系统化为

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}a&=\left[\left(\mu_1+\frac{\mu_2}{8}\right)a+\frac{\mu_3}{a}\right]\mathrm{d}t+\left(\mu_3+\frac{\mu_4}{8}a^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}W_a+(a\mu_5)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}W_\theta\\\mathrm{d}\theta&=(a\mu_5)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}W_a+\left(\frac{\mu_3}{a^2}+\frac{\mu_6}{16}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}W_\theta\end{aligned}\right\}\tag{5-43}$$

由前面的假设可知，各项系数应满足如下条件：

$$\mu_1<0,\quad \mu_3>0,\quad \mu_6>0,\quad \mu_2>\mu_4>0$$

所以由式(5-43)中扩散系数矩阵的情况可知当$\sigma_{12}^2=\sigma_{21}^2=0$时，即$\mu_5=0$($k_{21}-k_{12}=0$，因为结合第 1、2 节可知，$k_{11}+k_{22}=0$可不予考虑)时，平均振幅$a(t)$为一个一维 Markov 扩散过程。

在模拟时应分成$\mu_5=0$与$\mu_5\neq0$两种情况进行。

1. 当 $\mu_5 = 0$ 时

可设 $k_{21} - k_{12} = 0$,则有 $\mu_6 = \frac{\mu_2 - \mu_4}{2}$。并将式(5-43)写为

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}a &= \left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8}\right)a + \frac{\mu_3}{a}\right]\mathrm{d}t + \left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8}a^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}W_a \\ \mathrm{d}\theta &= \left(\frac{\mu_3}{a^2} + \frac{\mu_2 - \mu_4}{32}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}W_\theta \end{aligned}\right\} \tag{5-44}$$

对于原始系统式(5-4)中的系数取为

$$\varepsilon = 0.8, a = 0.6, b = 0.5, \alpha = 0.4, \beta = 0.1, \alpha_1 = 0.6, \beta_1 = 0.3, \alpha_2 = 0.6, \beta_2 = 0.1$$

则可计算得到

$$\mu_1 = -0.476\,923, \mu_2 = 2.88, \mu_3 = 0.442\,147, \mu_4 = 2.88, \mu_5 = \mu_6 = 0$$

选取的初值为 $a_0 = 0.1, \theta_0 = 0$。在计算数值时,考虑到实际情况将时间间隔取为 $\tau = 0.5$ d, 在绘制图形时考察 100 d 和 300 d 作为一个观察分析时间区间。

应用随机增维精细积分法进行数字模拟。绘制 300 d 的相图如图 5-9 所示。极限环的形状不是很明显;若绘制 1 000 d 的图形,则极限环形状明显可见,如图 5-10 所示,其时程图如图 5-11 所示。

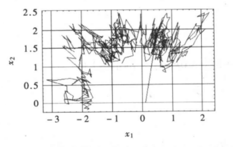


图 5-9 $\mu_1 = -0.476\,923, \mu_2 = 2.88, \mu_3 = 0.442\,147, \mu_4 = 2.88, \mu_5 = \mu_6 = 0$ 时通过平均振幅绘制藻类浓度扰动相图 (某一次模拟,300 d)

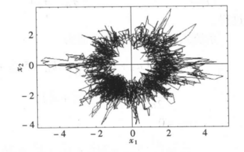


图 5-10 $\mu_1 = -0.476\,923, \mu_2 = 2.88, \mu_3 = 0.442\,147, \mu_4 = 2.88, \mu_5 = \mu_6 = 0$ 时通过平均振幅绘制藻类浓度扰动相图 (某一次模拟,1 000 d)

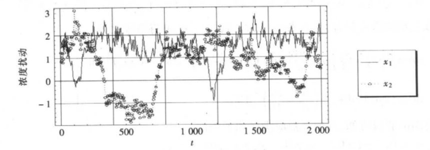


图 5-11 $\mu_1 = -0.476\,923, \mu_2 = 2.88, \mu_3 = 0.442\,147, \mu_4 = 2.88, \mu_5 = \mu_6 = 0$ 时通过平均振幅绘制藻类浓度扰动的时程图 (某一次模拟,1 000 d)

2. 当 $\mu_5 \neq 0$ 时

选取参数 $\mu_1 = -0.4, \mu_2 = 3, \mu_3 = 4, \mu_4 = 3, \mu_5 = 1, \mu_6 = 1$。

绘制相图及时程图分别如图 5-12、图 5-13 所示。在相空间中明显出现了最大可能意义下的一个“颜色最深”的极限环(带状)。由此可以看出,应用随机增维精细积分法可以形象地阐述以概率意义上产生的随机 Hopf 分岔。

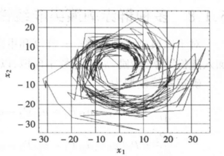


图 5-12　$\mu_1 = -0.4, \mu_2 = 3, \mu_3 = 4, \mu_4 = 3, \mu_5 = \mu_6 = 1$ 时通过平均振幅绘制藻类浓度扰动相图 (某一次模拟,200 d)

若想增大“可能性”,只需增加观察的时间(此处仅从理论意义看问题)。例如将时间增加到 1 000 d,“颜色最深”的极限环呈带状,如图 5-14 所示。

3. 实际意义

通过数字模拟看到,随机动力系统所对应的状态在实际问题中可能还是一种动荡的正常(未暴发

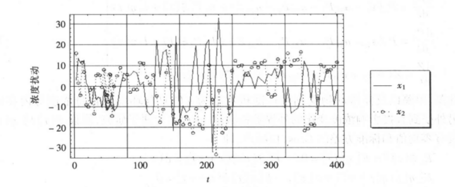


图 5-13　$\mu_1 = -0.4, \mu_2 = 3, \mu_3 = 4, \mu_4 = 3, \mu_5 = \mu_6 = 1$ 时通过平均振幅绘制藻类浓度扰动的时程图 (某一次模拟,200 d)

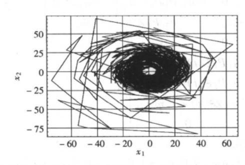


图 5-14　$\mu_1 = -0.4, \mu_2 = 3, \mu_3 = 4, \mu_4 = 3, \mu_5 = \mu_6 = 1$ 时通过平均振幅绘制藻类浓度扰动相图 (某一次模拟,1 000 d)

赤潮)状态。对于赤潮是否发生要看藻类浓度扰动后,是否超过了发生赤潮的阈值。显然,随机激励越大,浓度受到的扰动越大,越可能导致赤潮发生。

5.1.8 多种群赤潮藻类非线性随机动力系统的数字模拟

对于以典型赤潮藻类——硅藻和甲藻及浮游动物为分析对象建立的三维动力系统模型,加入随机因素(激励)后进行数字模拟,以求形象地说明赤潮动力学行为的复杂性与规律性。

确定系统模型为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}t} &= P_1(\varepsilon_1 - a_{11}P_1 - a_{12}P_2 - a_{13}Z)\\ \frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}t} &= P_2(\varepsilon_2 - a_{21}P_1 - a_{22}P_2 - a_{23}Z)\\ \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} &= Z(-\varepsilon_3 + a_{31}P_1 + a_{32}P_2)\end{aligned}\right\} \tag{5-45}$$

受到随机因素作用,得到的随机系统模型为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}t} &= P_1(\varepsilon_1 - a_{11}P_1 - a_{12}P_2 - a_{13}Z) + h_1P_1\xi(t) + l_1\eta(t)\\ \frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}t} &= P_2(\varepsilon_2 - a_{21}P_1 - a_{22}P_2 - a_{23}Z) + h_2P_2\xi(t) + l_2\eta(t)\\ \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} &= Z(-\varepsilon_3 + a_{31}P_1 + a_{32}P_2) + h_3Z\xi(t) + l_3\eta(t)\end{aligned}\right\} \tag{5-46}$$

其中硅藻、甲藻以及浮游动物受到乘性随机激励为 $\xi(t)$(与环境及自身浓度等内在因素有关),另外受到直接影响浓度变化的外界随机激励 $\eta(t)$。为便于研究,假设 $\xi(t)$与 $\eta(t)$为独立的具有零均值和标准方差的 Gauss 白噪声,即

$$E[\xi(t)] = E[\eta(t)] = 0,\quad E[\xi(t)\xi(t+\tau)] = \delta(\tau)$$

$$E[\eta(t)\eta(t+\tau)] = \delta(\tau),\quad E[\xi(t)\eta(t+\tau)] = 0$$

应用随机增维精细积分法,选取矩阵为

$$\boldsymbol{B}_D = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & -a_{11}P_1^2 - a_{12}P_1P_2 - a_{12}P_1Z \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & -a_{21}P_1P_2 - a_{22}P_2^2 - a_{23}P_2Z \\ 0 & 0 & -\varepsilon_0 & a_{31}P_1Z + a_{32}P_2Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h_1P_1\xi(t) + l_1\eta(t) \\ 0 & 0 & 0 & h_2P_2\xi(t) + l_2\eta(t) \\ 0 & 0 & 0 & h_3Z\xi(t) + l_3\eta(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对系统参数作如下设定:

$$\varepsilon_i = a_{ii} = 1, a_{23} = 1, a_{12} = 1.0, a_{21} = 1.5, a_{32} = 0.5, a_{13} = r, a_{31} = 0.5r$$

并将 r 视为分岔参数。

在计算数值时,考虑到实际情况将时间间隔取为 $\tau = 0.5$ d,在绘制图形时考察 100 d 作为一个观察分析时间区间。

通过比较受到随机激励的系统与确定系统的相图与时程图,会看到确定系统在不同的参数取值时具有丰富的动力学行为,而相应的随机系统却会发生很大的变化。

1. 确定系统模拟

①当选取的初值为: $P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03$,而分岔参数 $r=6.0$ 时,系统出现 1 环面(需长时间观察,如时间区间取为 1 000 d,观察效果非常好;但选取这样的时间区间显然实际意义不大)。其相图与时程图分别如图 5-15、图 5-16、图 5-17 所示。联系实际问题,浓度的变化处于一种拟周期振荡状态,不会有暴发性增长,不会引发赤潮。

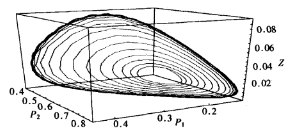


图 5-15　$r=6.0, P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03$ 时确定系统的相图

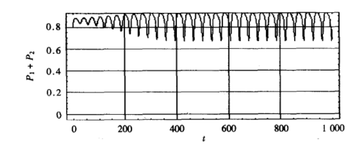


图 5-16　$r=6.0, P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03$ 时确定系统的藻类浓度和的时程图

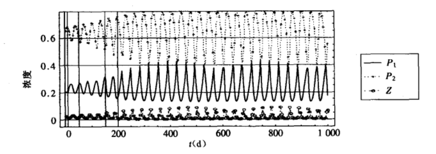


图 5-17　$r=6.0, P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03$ 时确定系统的藻类浓度及浮游动物的密度的时程图

②当选取的初值为：$P_1^{(0)}=0.6, P_2^{(0)}=0.4, Z^{(0)}=0.12$，而分岔参数 $r=7.5$ 时，系统出现1环面，此次连续计算了500 d，使模拟出的性态效果较显著。其相图与时程图分别如图5-18、图5-19、图5-20所示。联系实际问题，浓度的变化处于一种拟周期振荡状态，不会有暴发性增长，不会引发赤潮。

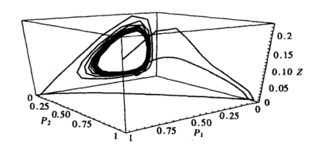


图5-18 $r=7.5, P_1^{(0)}=0.6, P_2^{(0)}=0.4, Z^{(0)}=0.12$ 时确定系统的相图

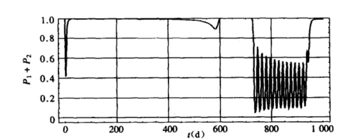


图5-19 $r=7.5, P_1^{(0)}=0.6, P_2^{(0)}=0.4, Z^{(0)}=0.12$ 时确定系统的藻类浓度和的时程图(观察500 d)

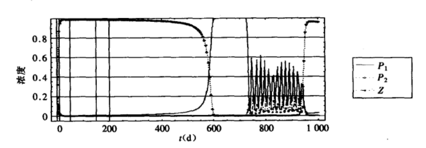


图5-20 $r=7.5, P_1^{(0)}=0.6, P_2^{(0)}=0.4, Z^{(0)}=0.12$ 时确定系统的藻类浓度及浮游动物的密度的时程图

③当选取的初值为：$P_1^{(0)}=0.6, P_2^{(0)}=0.4, Z^{(0)}=0.12$，而分岔参数 $r=7.8$ 时，系统出现2环面，此次连续计算了1 000 d，使模拟出的性态效果较显著。其相图与时程图分别如图5-21、图5-22所示。联系实际问题，浓度的变化处于一种拟周期振荡状态，不会有暴发性增长，不会引发赤潮。

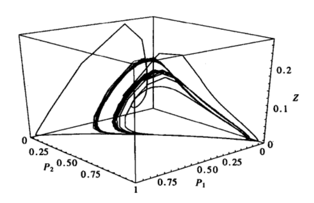


图 5-21　$r=7.8, P_1^{(0)}=0.6, P_2^{(0)}=0.4, Z^{(0)}=0.12$
时确定系统的相图

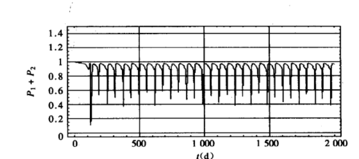


图 5-22　$r=7.8, P_1^{(0)}=0.6, P_2^{(0)}=0.4, Z^{(0)}=0.12$
时确定系统的藻类浓度和的时程图

④当选取的初值为：$P_1^{(0)}=0.6, P_2^{(0)}=0.4, Z^{(0)}=0.12$，而分岔参数 $r=10$ 时，系统出现 Vance's 螺旋混沌，此次连续计算了 1 000 d，使模拟出的性态效果较显著。其相图和时程图分别如图 5-23、图 5-24 所示。联系实际问题，浓度的变化处于一种混沌状态，但藻类浓度的和是有

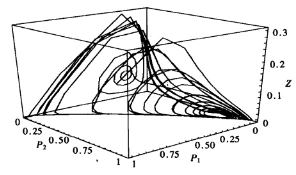


图 5-23　$r=10, P_1^{(0)}=0.6, P_2^{(0)}=0.4, Z^{(0)}=0.12$
时确定系统的相图

界的，不会有暴发性增长，不会引发赤潮。

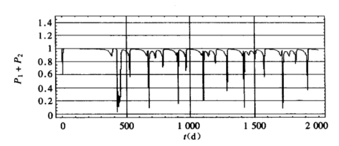


图 5-24 $r=10, P_1^{(0)}=0.6, P_2^{(0)}=0.4, Z^{(0)}=0.12$
时确定系统的藻类浓度和的时程图

通过对确定系统的数字模拟，发现对于不同的初始值(极限环内外皆可)，当分岔参数 r 在适当的范围内，确定系统存在稳定的 1 环面；当 r 增大时，系统会出现 2 环面 T^2；若 r 继续增大时，系统会产生 Vance's 螺旋混沌。结合以上分析，发现确定系统由 2 环面 T^2 通向混沌(Chaos)的道路为通有的，可推断出该确定系统通过拟周期分岔产生混沌；即使该确定系统发生了混沌，也不会导致赤潮的发生(这是对确定系统的理论分析结果)。

2. 随机系统的模拟

在此仍然选取 r 作为分岔参数，采用随机增维精细积分法模拟随机系统式(5-38)的性态，系统中随机激励部分的系数取为

$$h_1=0.3,\quad l_1=12,\quad h_2=0.5,\quad l_2=10,\quad h_3=1,\quad l_3=2$$

①选取分岔参数 $r=6.0$，初值为：$P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03$，观察系统的相图、藻类浓度和的时程图以及各类物质的浓度(密度)的时程图，如图 5-25、图 5-26、图 5-27 所示，分析随机系统的演化。

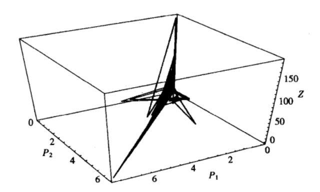


图 5-25 $r=6.0, P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03$,
$h_1=0.3, l_1=12, h_2=0.5, l_2=10, h_3=1, l_3=2$
时随机系统的相图（某一次模拟）

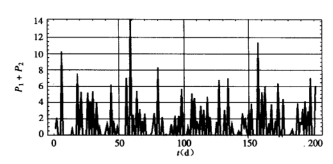


图 5-26　$r=6.0, P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03, h_1=0.3, l_1=12, h_2=0.5, l_2=10, h_3=1, l_3=2$ 时随机系统藻类浓度和的时程图

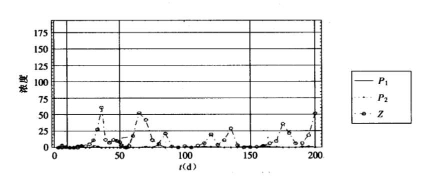


图 5-27　$r=6.0, P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03, h_1=0.3, l_1=12, h_2=0.5, l_2=10, h_3=1, l_3=2$ 时随机系统的藻类及浮游动物的密度的时程图

②选取分岔参数 $r=7.8$，初值为：$P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03$，观察系统的相图、藻类浓度和的时程图，如图 5-28、图 5-29 所示。分析随机系统的演化。

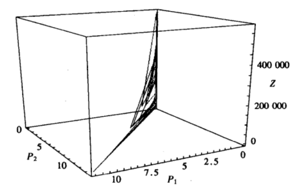


图 5-28　$r=7.8, P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03, h_1=0.3, l_1=12, h_2=0.5, l_2=10, h_3=1, l_3=2$ 时随机系统的相图（某一次模拟）

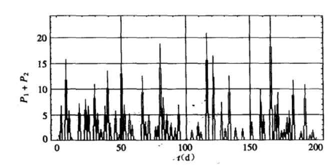


图 5-29 $r=7.8, P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03, h_1=0.3, l_1=12,$
$h_2=0.5, l_2=10, h_3=1, l_3=2$ 时随机系统藻类浓度和的时程图

③选取分岔参数 $r=10$,初值为:$P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03$,只观察藻类浓度和的时程图就会看到系统处于一种混沌状态,如图 5-30 所示。

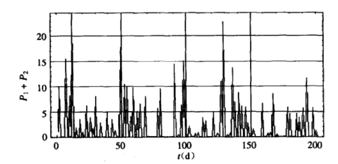


图 5-30 $r=10, P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03,$
$h_1=0.3, l_1=12, h_2=0.5, l_2=10, h_3=1, l_3=2$
时随机系统藻类浓度和的时程图(某一次模拟)

通过用随机增维精细积分法对参数 r 取不同值时的随机动力系统的数字模拟可以看到,随机项的系数足够大时,随机系统会呈现一种复杂的混沌状态。而赤潮是否会暴发,要由暴发赤潮所需藻类浓度的阈值确定。

例如,假设暴发赤潮阈值(藻类浓度)$f_{HAB}=20$,在 $r=7.8, h_1=0.3, l_1=12, h_2=0.5, l_2=10, h_3=1, l_3=2P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03$ 时,从随机系统藻类浓度和的时程图(见图 5-29)可以看到,在 100 d 内有 2 次暴发的可能(当然每一次的程度可能不同)。若 $f_{HAB}=15$,则在 100 d 内可能暴发 5 次不同程度的赤潮。

应当指出的是,按照进行数字模拟时的随机项的取值,系统式(5-46)受到的已不是弱随机激励,研究弱随机动力系统的理论大多已不适用。联系赤潮模型的实际意义,此处通过随机增维精细积分法完成的数字模拟已形象地阐明随机系统的不确定性,进而说明赤潮的发生与强随机激励有着直接的因果关系。

5.2 赤潮食物链的非线性随机动力学

随着人类科技的进步与对生态环境的日益关注，海洋生态系统的研究日趋活跃，赤潮生态非线性动力学模型的研究成为赤潮研究领域内的一个重要方向。所谓赤潮生态动力学建模，即考虑不同营养水平的生物物种以及与环境之间的关系，建立起生物、物理、化学的耦合模型。本节通过对渤海湾典型营养盐浓度、浮游植物密度（藻类）、浮游动物密度以及碎屑浓度等因素的分析，建立了非线性生态动力学的食物链模型；并在考虑了随机因素后，建立了非线性随机模型；且用随机增维精细积分法进行了数字模拟，分析系统的性态。

根据上节中建立的确定系统模型，以 a 及 N 为分岔参数进行分析所得到的结论说明：没有参数的急剧增长，藻类浓度（浮游植物密度）$y(t)$是不会有暴发性增加的。但实际情况却是赤潮的暴发日益频繁，所以仅靠确定性模型很难说明实际问题。因而在考虑海水中营养盐浓度、浮游植物密度、浮游动物密度以及碎屑浓度等 4 种物质浓度（密度），以及赤潮发生时 4 种物质密度（密度）的相互作用关系的同时，考虑到实际情况是任何状态都要受到随机因素的影响，尤其是近海生态环境可以受到人类活动（排污、航行、捕捞作业等）以及自然环境的随机变化（光照、气温、雨水、海流、潮汐等）的多方面随机作用，并利用生态学原理，而建立了如下综合生态动力学随机模型：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{dxy}{(e+x)(b+cy)} + \frac{\lambda\beta zy^2}{(\mu^2+y^2)} + k(N_0 - x) + dyz^2 + w\phi + k_{11}x\xi(t) + k_{12}\eta(t)\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{dxy}{(e+x)(b+cy)} + \frac{\lambda zy^2}{(\mu^2+y^2)} - ry - (s+k)y + k_{21}y\xi(t) + k_{22}\eta(t)\\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\alpha\lambda y^2 z}{(\mu^2+y^2)} - dz^2 + k_{31}z\xi(t) + k_{32}\eta(t)\\
\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= (1-\alpha-\beta)\frac{\lambda y^2 z}{(\mu^2+y^2)} + ry - w(k+\phi+\psi) + k_{41}w\xi(t) + k_{42}\eta(t)
\end{aligned}\right\} \tag{5-47}$$

其中，$x(t)$代表营养物质，包括氮、磷等营养元素的浓度总和；$y(t)$代表浮游植物密度（各类可导致赤潮发生的藻类密度之和）；$z(t)$代表浮游动物密度；$w(t)$代表海水中有机物和无机物微小的碎屑浓度；$\xi(t)$、$\eta(t)$为相互独立的零均值标准 Gauss 白噪声；k_{ij}为非负实数。

四种物质的相互作用关系、参数的取值表参见 4.3.2 节（表 4-3）。

$k_{11}x\xi(t)+k_{12}\eta(t)$由乘性激励部分和独立外界激励部分组成，前者 $k_{11}x\xi(t)$说明随机因素（综合各种随机因素）对 $x(t)$的变化率的贡献与当时 $x(t)$的大小有乘性关系；而后者 $k_{12}\eta(t)$ 可认为是外界随机因素强行作用引起 $x(t)$的变化率的改变程度（对 $y(t)$、$z(t)$、$w(t)$的情况有类似的说明，此处从略）。

在上一节中曾讨论过该系统相应的确定系统的性态，其中有些稳定性较强的结论。而赤潮的暴发却越来越频繁，因此所建立的随机动力系统就可较好地反映实际情况。下面用随机增维精细积分法模拟系统的性态变化过程。

首先设迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的确定部分为

$$\boldsymbol{B}_D=\begin{bmatrix} -k & 0 & 0 & \phi & -\dfrac{axy}{(e+x)(b+cy)}+\dfrac{\lambda\beta zy^2}{(\mu^2+y^2)}+kN_0+d\gamma z^2 \\ 0 & -r-k-s & 0 & 0 & \dfrac{axy}{(e+x)(b+cy)}-\dfrac{\lambda zy^2}{(\mu^2+y^2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\alpha\lambda y^2 z}{(\mu^2+y^2)}-dz^2 \\ 0 & r & 0 & -k-\phi-\psi & (1-\alpha-\beta)\dfrac{\lambda y^2 z}{(\mu^2+y^2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5-48}$$

迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的随机部分为

$$\boldsymbol{B}_S=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & k_{11}x\xi(t)+k_{12}\eta(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}x\xi(t)+k_{22}\eta(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{31}x\xi(t)+k_{32}\eta(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{41}x\xi(t)+k_{42}\eta(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5-49}$$

若确定项系数取默认值,而随机项系数取值为

$$k_{11}=0.3,k_{12}=6,k_{21}=0.6,k_{22}=6,k_{31}=0.2,k_{32}=2,k_{41}=0.1,k_{42}=1$$

在进行数字模拟时选取初值为 $x_0=0.4,y_0=0.9,z_0=0.4,w_0=0.1$;在计算数值时,考虑到实际情况将时间间隔取为 $\tau=0.5$ d,在绘制图形时考察 100 d 作为一个观察分析时间区间。

将结果与相应的确定系统比较可知,在相同的初值条件下,确定系统可能是稳定的。对于相应的随机系统,当随机因素对营养物质的浓度总和 $x(t)$ 的变化作用较大时就极易引发浮游植物密度 $y(t)$ 的暴发性增长,从而极易导致赤潮的发生。

在此以 a(浮游植物的最大生长率)及 N_0(混合层以下的营养盐浓度)为分岔参数进行数字模拟,观察分析随机系统的性态。

①当 $a=0.28,N_0=0.6$,初值选为{0.4,0.9,0.15,0.08}时,模拟随机动力系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内可得系统和藻类浓度 $y(t)$ 及系统各类物质浓度的时程图,如图 5-31、图 5-32、图 5-33 所示。

通过比较可以看到在 $a=0.28,N_0=0.6$ 时,确定系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内有稳定的 1 环面(系统具有稳定的高维 Hopf 分岔);但相应的随机系统是不稳定的,而且藻类浓度 $y(t)$ 随着随机激励的增大而有较大变化,所以一旦超过赤潮出现所需藻类浓度的阈值,则会引发赤潮暴发。若降低藻类物质的最大生长率会得到怎样的情况,参见下例。

②当 $a=0.2,N_0=6.0$,初值选为{0.4,0.1,0.05,0.08}时,模拟随机动力系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内可得系统相图及藻类浓度 $y(t)$ 的时程图,如图 5-34、图 5-35 所示。

通过比较可以看到在 $a=0.2,N_0=6.0$ 时,确定系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内有稳定的平衡点;但相应的随机系统是不稳定的,而且藻类浓度 $y(t)$ 随着随机激励的增大而有较大变化,所以一旦超过赤潮出现所需藻类浓度的阈值,则会引发赤潮暴发。在随机系统中若 N_0 的值有显著增大,则会使藻类浓度 $y(t)$ 以及其他各类物质的浓度发生较大幅度变化,参见下例。

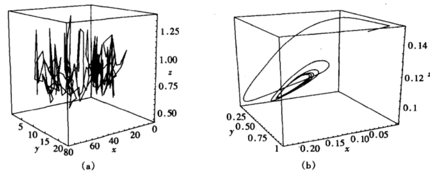


图5-31　$a=0.28,N_0=0.6$时随机系统与确定系统在域$\Sigma(x,y,z)$内的相图的比较
(a)随机系统;(b)确定系统

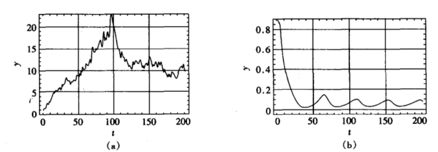


图5-32　$a=0.28,N_0=0.6$时随机系统与确定系统藻类浓度$y(t)$的时程比较
(a)随机系统;(b)确定系统

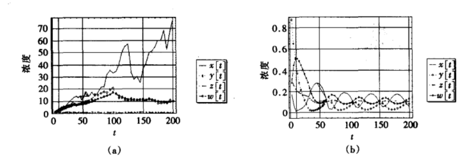


图5-33　$a=0.28,N_0=0.6$时随机系统与确定系统各类物质浓度的时程比较
(a)随机系统;(b)确定系统

③当$a=0.2,N_0=9.0$,初值选为$\{0.4,0.1,0.05,0.08\}$时,模拟随机动力系统在域$\Sigma(x,y,z)$内可得相图及藻类浓度$y(t)$的时程图,如图5-36、图5-37所示。

通过比较可以看到在$a=0.2$时,$N_0=6.0$与$N_0=9.0$所得确定系统在域$\Sigma(x,y,z)$内皆有稳定的平衡点;但相应的随机系统都是不稳定的,而且在同样强度的随机激励的作用下后者的藻类浓度$y(t)$变化程度明显大于前者。所以若同时增大藻类的最大增长率a及混合层以

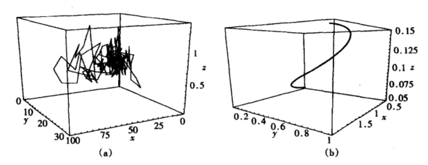


图 5-34 $a=0.2,N_0=6.0$ 时随机系统与确定系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内的相图的比较
(a)随机系统;(b)确定系统

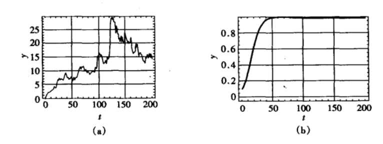


图 5-35 $a=0.2,N_0=6.0$ 时随机系统与确定系统藻类浓度 $y(t)$ 的时程比较
(a)随机系统;(b)确定系统

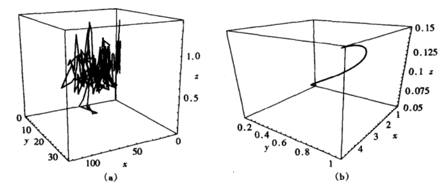


图 5-36 $a=0.2,N_0=9.0$ 时随机系统与确定系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内的相图的比较
(a)随机系统;(b)确定系统

下的营养元浓度 N_0,则必会使藻类浓度 $y(t)$ 的变化程度更大,参见下例。

④当 $a=0.28,N_0=9.0$,初值选为 $\{0.4,0.1,0.05,0.08\}$ 时模拟随机动力系统,在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内可得系统相图及藻类浓度 $y(t)$ 的时程图如图 5-38、图 5-39 所示。

通过数字模拟并比较了以上各例,可从理论上分析得到随机系统相应的确定系统在相同的初值条件下是稳定的。而实际问题是赤潮经常出乎预料地发生了,通过分析可以认为,随机

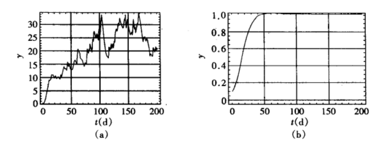


图 5-37　$a=0.2,N_0=9.0$ 时随机系统与确定系统藻类浓度 $y(t)$ 的时程比较
(a)随机系统;(b)确定系统

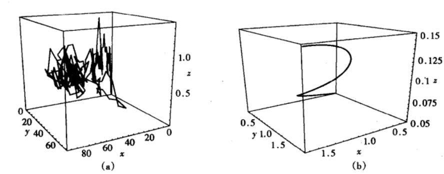


图 5-38　$a=0.28,N_0=9.0$ 时随机系统与确定系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内的相图的比较
(a)随机系统;(b)确定系统

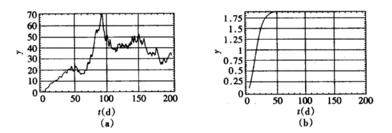


图 5-39　$a=0.28,N_0=9.0$ 时随机系统与确定系统藻类浓度 $y(t)$ 的时程比较
(a)随机系统;(b)确定系统

因素干扰应当列入导致赤潮发生的主要原因之一。

在模拟随机系统时选取随机项的系数较大,即系统受到强随机激励。而这种强随机激励的存在往往会使原来的确定系统失去稳定性,并且使各类物质的浓度,尤其是浮游植物的密度发生大幅度变化,一旦在某时达到赤潮出现所需藻类浓度的阈值,则会导致赤潮暴发。

第6章　赤潮的回归预测

回归是统计学中一个重要的研究方向。当给定 n 个自变量(也称作输入变量,解释变量) $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的值时,一般希望得到一个或多个因变量 y(或者输出变量,响应变量)的值,并假定 y 是单变量。通常的做法是通过给定的一组自变量及对应因变量的值 $\{y_i,x_i\}_i^N$ 估计出一个从 x 取值空间 $D\subset\mathbf{R}^n$ 映射到 y 取值空间的函数 $\hat{F}(\boldsymbol{x})$。当已知新的自变量 $\boldsymbol{x}$ 的值,对应的预测值就是 $\hat{F}(x)$。如果因变量 y 取值是连续的,统计学中称为回归;如果 y 取值是离散的,则称为分类,同样的问题也是机器学习研究的重点。对于因变量 y 取值是连续的情形,也被称为函数估计、函数近似、实值预测、连续分类学习等等。为统一起见,本章采用统计术语——回归。对于 y 取值离散的情况,就是通常所说的系统辨识,本章一律称作分类。固定值 $\{y_i,x_i\}_i^N$ 在机器学习中称作训练样本,而在统计学中一般称为样本。

机器学习关心 $\hat{F}(x)$实现的具体算法以及预测的精度,预测的精度主要是通过实际的数据来检验的。将数据集的一部分当作训练样本构造函数 $\hat{F}(x)$或者 if-then 规则集(实质上也可以看作函数),剩下的用来检验得到误差,这样获得的误差只是真实误差的一个观测值。为了更好地估计真实误差,一般采用交叉证实(cross-validation),即随机地将数据集分成训练集和检验集得到一个误差值,反复多次进行,获得一组误差值,这组误差值的均值就是真实误差的一个好的估计。一个好的算法,不仅要求较高的精度,而且所得的模型能够很好地解释实际问题,也就是函数 $\hat{F}(x)$要有明确的意义,比如决策树(decision trees)就比人工神经网络更容易理解、解释。通常由训练样本得到函数估计 $\hat{F}(x)$的算法是很复杂的,在实际应用中,许多数据都是海量的,所以运算代价是不得不考虑的问题。如何将这些算法融入数据库就是 KDD (Knowledge Discovery in Database)的研究方向。它泛指所有从源数据中发掘模式或联系的方法,人们接受了这个术语,并用 KDD 来描述整个数据发掘的过程,包括最开始的制定业务目标到最终的结果分析,而用数据挖掘(datamining)来描述使用挖掘算法进行数据挖掘的子过程。但最近人们却逐渐开始发现数据挖掘中有许多工作可以由统计方法来完成,并认为最好的策略是将统计方法与数据挖掘有机地结合起来。数据仓库技术的发展与数据挖掘有着密切的关系,数据仓库的发展是促使数据挖掘越来越热的原因之一。但是,数据仓库并不是数据挖掘的先决条件,因为有很多数据挖掘可直接从操作数据源中挖掘信息。由于数据库的数据来自不同的领域,很难有专家能将不同领域的联系讲述得一清二楚,所以这种自动发现知识的方法是很实用的。当然这需要统计学家、计算机专家和数据库专家的大力合作。

统计学对预测值 $\hat{F}(x)$的渐近分布更感兴趣,有了预测值的渐近分布就可以控制预测的误差。当然这得假定因变量 y 或者自变量 x 是随机变量,$\{y_i,x_i\}_i^N$ 是该随机变量的独立同分布的样本,且假定

$$y=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\varepsilon$$

其中:n 元函数 F 决定了自变量 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 与因变量的关系;ε 是随机噪声,期望为零,方差为 1。噪声既不可控制,也不可观测。回归的目的就是通过样本给出函数 F 的一个合理的估计 $\hat{F}$。如何评价“合理”,必须定义损失函数 $L(y,F(x))$,理论上最好的估计就是

$$\hat{F} = \arg\min E_{y,x}L(y,F(x)) = \arg\min E_x[E_y(L(y,F(x)))|x] \tag{6-1}$$

当然，由于(y,x)的联合分布是未知且不可以计算的，只能通过样本估计 F。

对于回归问题，经常使用的损失函数 $L(y,F)$有平方损失$(y-F)^2$，绝对损失$|y-F|$和 Huber 损失函数，其中 Huber 损失函数

$$L(y,F)=\begin{cases}\frac{1}{2}(y-F)^2 & (|y-F|\leqslant\delta)\\ \delta(|y-F|-\delta/2) & (|y-F|>\delta)\end{cases} \tag{6-2}$$

如果考虑分类问题，Logistic 回归可将两种类型的分类问题转化成回归问题，限制 y 取值为 ±1，假设

$$F(x)=\frac{1}{2}\log\left[\frac{P(y=1|x)}{P(y=-1|x)}\right] \tag{6-3}$$

由于容易得到概率估计

$$P(y=1|x)=1/(1+e^{-2F(x)})$$

$$P(y=-1|x)=1/(1+e^{2F(x)})$$

所以对应的二项分布的负对数似然函数

$$L(y,F)=\log(1+\exp(-2yF)) \tag{6-4}$$

其中，$y\in\{-1,1\}$。

式(6-4)也就是两种类型分类问题的 Logistic 回归的损失函数。对于多种类型的分类，常用的方法就是两两对比，取定一种类型，剩下的作为另一种类型，反复比较，从而得到归属的类型。另一种方法是调整损失函数为多项分布的负对数似然函数。通过式(6-4)可将分类和回归统一起来，极大地方便研究，而且该方法以极大似然估计作为理论背景，在实际应用中也取得很好的效果。当然，有许多算法是将回归问题转化成分类问题，如规则演绎(rule induction)，因为这些算法更容易解决分类问题。

在经典线性回归情形中，自变量 x 被认为不是随机变量。$\{y_i,x_i\}_i^N$ 是独立同种分布的样本，只是参数值与 x_i 有关。而为了提高预测的精度，算法已经越来越复杂，单纯从理论上推导变得不大现实，更多的是借助于随机模拟和自助法(bootstrap)计算预测值 $\hat{F}(x)$的置信区间及渐近分布。

回归方法一般分为参数和非参数两种。

参数方法假定自变量和因变量间的真实函数关系 f 是特定的带有参数$\alpha=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_p\}$的函数，只要确定这些参数，相应的函数就完全确立。原则上选择参数使得期望损失

$$R(\alpha)=E_x[E_y(L(y,F(x)))|x;\alpha] \tag{6-5}$$

最小，但是由于(y,x)的联合分布是未知的，只能用样本的经验误差

$$R_{emp}(\alpha)=\sum_{i=1}^{N}L(y_i,F(x;\alpha)) \tag{6-6}$$

代替 $R(\alpha)$，最小化 R_{emp}的 $\hat{\alpha}$ 就是参数α 的估计值。参数方法缺少稳定性，只有当真实函数和假定函数形式接近时才可获得较好的预测结果。简单的参数模型只需较少的样本，拟合的速度快，得到的函数容易解释。如果白噪声 ε 相比于 $F(x)$较大，即使参数模型选择有误，则系统误差应该也不会很严重。选择合适的模型取决于应用的目的。如果为了说明自变量和因变量的关系，应选择比较简单的模型，如线性回归和非线性回归；如果只是为了能够得到新的自变

量的预测值以及提高预测的精度，可以考虑复杂的参数模型，如人工神经网络。

非参数方法一般没有明确的函数形式，对于新的自变量 x，预测值 $\hat{F}(x)=\sum_{i=1}^{N}S_i(x,h)y$，其中 h 是可选的平滑参数，表示样本观测值的权重且随着 x 的不同而不同。一般说来，离 x 越近的观测值 x_i 对应的 y_i 的权重越大。由于 x 和 x_i 都属于 $\mathbf{R}^n$ 空间，距离的远近应通过范数来衡量，常用的是平方范数。常用的非参数回归有基于实例回归、局部加权回归(LESS)和样条回归等等。非参数方法在低维空间有着很好的效果；但是在高维空间，由于存在"纬数灾难"的问题，为了使样本均匀分布在自变量的取值空间 $D\subset\mathbf{R}^n$，需要大量的样本，且样本量 N 随着纬数 n 指数递增，所以非参数方法在高维空间的效果与样本量密切相关，如果样本量过小，则效果不尽如人意。

各种常见的回归方法将在以下各小节分别讨论。

6.1 非参数回归

6.1.1 基于实例回归

一个实例就是一个观测值$(y_i,\boldsymbol{x}_i)$，由于基于实例回归(D. Aha, 1991; B. Dasarathy, 1991; D.Kibler, 1989)通常由人工智能、机器学习等领域专家提出，为了方便不同读者，保留实例的概念。基于实例回归计算简单，没有假定模型，样本就是模型。

最近邻方法是基于实例回归方法中最流行的，它不对自变量和因变量的函数关系作出假定，其目的只是当给定样本后，若观测到新的自变量 $\boldsymbol{x}$，能够预测值 $\hat{F}(\boldsymbol{x})$。虽然最近邻有许多变形，但基本思想差不多，即选择与 $\boldsymbol{x}$ 近的 K 个样本，对于对应的 y_i 赋予不同的权值，越接近 $\boldsymbol{x}$，权值越高，这些 y_i 的加权平均就是预测值 $\hat{F}(\boldsymbol{x})$。K 是一个可选的参数，由于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}_i$ 都属于 $\mathbf{R}^n$ 空间，为了说明空间两个点的接近程度，定义从 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}$ 的函数 $\mathrm{Sim}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$，称作相似度函数。算法 6-1 描述了最简单的近邻算法，标准化的实质就是对每一个分量定义一个从 $[a_i,b_i]\rightarrow[0,1]$的单增函数 f_i，且 $f_i(a_i)=0$，$f_i(b_i)=1$。一种方法就是假定 f_i 是线性的，a_i 就是样本中对应的第 i 个分量的最小值 m_i，b_i 取为样本中对应的第 i 个分量的最大值 M_i，所以单增函数 $f_i(x)=(x-m_i)/(M_i-m_i)$，$m_i\leqslant x\leqslant M_i$，若 $x>M_i$，则 $f_i(x)=1$；若 $x<m_i$，则 $f_i(x)=0$。对于标准化后的实例，一个常用的相似度函数就是

$$\mathrm{Sim}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)=\sum_{k=1}^{n}(1.0-|x_{ik}-x_{jk}|)$$

其中 x_{ik}表示实例$\boldsymbol{x}_i$ 的第 k 个分量。

基于实例回归的假定就是自变量和因变量的真实函数是局部线性的，对于充分大的样本，基于实例回归能很好地近似连续函数。不言而喻，基于实例回归假定所有的自变量都与因变量同等相关，但是很有可能几个自变量就能够决定因变量的值，而不需要全部的自变量。为了减少海量数据的存储空间，可以采用平均实例的办法(D. Aha, 1991)。基于实例回归最大的缺点就是它不能够得到明确的模型解释样本，揭示各种变量之间的关系。

1	标准化样本中的任一个实例 x_i 的每一个分量到区间[0,1]
2	标准化新的检验实例 x
3	$\forall x_i \mid x_i \neq x \mid$:计算 $\mathrm{Sim}(x_i,x)$
4	令集合 S 表示最大的 k 个 $\mathrm{Sim}(x_i,x)$ 对应的 x_i
5	令 $\mathrm{Sum}=\sum_{x_i\in S}\mathrm{Sim}(x_i,x)$
6	则预测值 $\hat{F}(x)=\sum_{x_i\in S}\mathrm{Sim}(x_i,x)y_i/\mathrm{Sum}$

算法 6-1　近邻算法

6.1.2　局部加权回归

局部加权回归与 6.1.1 节基于实例回归有很大的相似性。第一,两种算法拟合样本的主要步骤是存储样本,大部分工作是在预测的时候完成的,也就是说,每预测一个新值,必须完成大量重复的工作。这两种方法都属于"惰性"学习方法。第二,当预测一个新的自变量 $\boldsymbol{x}$ 时,与 $\boldsymbol{x}$ 相近的实例 $\boldsymbol{x}_i$ 很大程度上决定预测值。第三,它们都把实例表示成 $\mathbf{R}^n$ 空间中的点,距离的远近通过范数度量。但是两种方法也存在差异,基于实例回归首先选择新实例周围一定数量的实例,然后平均这些实例对应的响应值;而局部加权回归在新的实例中建立一个平均的模型,模型的参数与新的实例密切相关。局部模型一般是次数不超过 2 的多项式。当一个新的实例获得预测值,局部模型就被删除,对每一个新的实例作出预测都是建立局部模型。在这些局部模型中,与新的实例接近的样本在局部模型中有较大的权值,而远的实例权值很小甚至为零。局部加权回归一般用在自变量纬数 $n\leqslant 2$ 的情形。

修改全局参数模型得到局部加权回归,全局参数模型就是假定

$$F=g(\boldsymbol{x};\{\alpha_j\}_1^p) \tag{6-7}$$

$g(\boldsymbol{x};\{\alpha_j\}_1^p)$ 就是参数模型,最常用的就是线性模型

$$g(\boldsymbol{x};\{\alpha_j\}_1^p)=\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i \tag{6-8}$$

$\{\alpha_j\}_1^p$ 的估计值 $\{\hat{\alpha}_j\}_1^p$ 就是使得经验损失最小的 $\mathbf{R}^p$ 中的点,即

$$\{\hat{\alpha}_j\}_1^p=\arg\min_{\{\alpha_j\}_1^p}\sum_{i=1}^{N}L(y_i,g(x_i;\{\alpha_j\}_1^p)) \tag{6-9}$$

为了保证在新的实例 $\boldsymbol{x}$ 周围的观测值 $\boldsymbol{x}_i$ 对回归有更大的影响,在参数估计中引入权值,即

$$\{\hat{\alpha}_j(\boldsymbol{x})\}_1^p=\arg\min_{\{\alpha_j\}_1^p}\sum_{i=1}^{N}\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)L(y_i,g(\boldsymbol{x};\{\alpha_j\}_1^p)) \tag{6-10}$$

由于权重函数 $\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)$ 随 $\boldsymbol{x}$ 不同而变化,对于每一个新的 $\boldsymbol{x}$,参数估计值 $\{\hat{\alpha}_j(\boldsymbol{x})\}_1^p$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的函数。这种近似的性质很大程度上取决于 ω 的选择,其次是参数函数 g 的形式。研究的最多的是常数函数 $g(\boldsymbol{x};\alpha)$(E. Parzen, 1962; D. Shepard, 1964; M. Bonzini, 1985)。W. S. Cleveland (1979)建议的线性函数 g 得到更好的结果,尤其在边界区域(W. S. Cleveland, 1983)给出了 g 是二次多项式的结论。C. J. Stone(1977)指出当采用简单的权值函数时,真实函数 f 的连续性质决定高阶多项式的收敛速度。

局部权重回归最大的难点就是权重 ω 的确定,这在很大程度上取决于真实函数 f 的性质,但是 F 是未知的。任何把主要权重放在以 $\boldsymbol{x}$ 为中心的凸集上的函数都可以当作权重函数,最常用的就是核平滑

$$\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=K(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')/s(\boldsymbol{x})) \tag{6-11}$$

其中 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 表示点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 之间的距离,常用的就是平方范数;$s(\boldsymbol{x})$ 是标量,称作步长(bandwidth);K 是单变量的核函数(kernel function)。随着自变量的增大,核函数的绝对值逐渐减小,对任何一个核函数,都有 $\int K(y)\mathrm{d}y=1$。表 6-1 列出了一些常用的核函数,其中 $I(\cdot)$ 表示示性函数。惯用的步长 $s(\boldsymbol{x})=s_0$,此时就是核平滑;若 $s(\boldsymbol{x})=s_0/\hat{p}(\boldsymbol{x})$,称为近邻平滑,其中 $\hat{p}(\boldsymbol{x})$ 是点 $\boldsymbol{x}$ 的局部密度估计。步长 $s(\boldsymbol{x})$ 是重要的局部性质控制参数,若 $s(\boldsymbol{x})$ 太小,ω 能反映出 $\boldsymbol{x}$ 每个相邻点包含的信息,但 $\boldsymbol{x}$ 周围的有较大权重的观测值 $\boldsymbol{x}_i$ 较少,也就是用来建立局部模型的数据不是很充分。例如对于高斯核函数来说,只有 $4s$ 范围内的观测值对估计产生影响,所以参数的估计值会有较大的方差。反之,过多的观测值 $\boldsymbol{x}_i$ 被赋予相差不大的权重,不能体现局部的差异性,所建立的局部模型就会产生较大的偏。当 s 趋于 ∞ 时,模型的局部性质就会消失,对任意的 $\boldsymbol{x}$,都有 $\hat{F}(\boldsymbol{x})=$ 常数,估计值的偏相当地大,所得的估计失去了意义。综合考虑偏和方差,就可以得到较优的步长 $s(\boldsymbol{x})$。在低维情形($n\leqslant2$)中,因为在没有大量数据的情况下,渐近条件也是可以满足的,所以通过步长 s 控制 $\{\alpha_j\}_1^p$ 的估计不会产生很大的问题。但在高维情形中,以 $\boldsymbol{x}$ 为中心的圆球,容量随着半径的 n 次幂增大,为了保证 ω 赋予足够的权值给相邻观测值以减少 $\{\alpha_j\}_1^p$ 的方差,步长 $\{\alpha_j\}_1^p$ 必须选择得很大,这样估计的偏也是很大的。

表 6-1 常用核函数

核函数	$K(x)$
均匀核函数	$\frac{1}{2}I(\lvert x\rvert\leqslant1)$
Triangular	$(1-\lvert x\rvert)I(\lvert x\rvert\leqslant1)$
Epanechnikov	$\frac{3}{4}(1-x^2)I(\lvert x\rvert\leqslant1)$
Quaritic	$\frac{15}{16}(1-x^2)^2I(\lvert x\rvert\leqslant1)$
Triweight	$\frac{32}{35}(1-x^2)^3I(\lvert x\rvert\leqslant1)$
高斯核函数	$\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}$
余弦核函数	$\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)I(\lvert x\rvert\leqslant1)$

一般假定 $g(\boldsymbol{x};\{\alpha_j\}_1^p)$ 为常数,线性函数、二次多项式、更高次多项式在实际中较少见到。而且局部加权回归只在 $n\leqslant2$ 时有较好的效果,当纬数较高时,更多的是将 F 表示成一系列一元或者二元函数的和的形式,更多的细节将在 6.1.4 节介绍。如果损失函数取 $L(y,F)$ 平方损失 $(y-F)^2$,且假定 $g(\boldsymbol{x};\{\alpha_j\}_1^p)$ 为常数,不难得到 Nadraya-Watson 估计

$$\hat{F}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N}\frac{\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_j)y_i}{\sum_{j=1}^{N}\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_j)}$$

与近邻算法相比,只是 $\boldsymbol{x}$ 周围的观测值 $\boldsymbol{x}_j$ 的权重有所不同,但实质上是一样的,前者通过相似度函数分配权重,后者通过核函数分配;前者通过 K 控制模型的复杂度,后者的步长是个平滑参数。所以当 $g(\boldsymbol{x};(\alpha_j)_1^p)$ 为常数时,局部加权回归实质就是基于实例回归。当 $g(\boldsymbol{x};\{\alpha_j\}_1^p)$ 为一次多项式(6-8)时,相应的预测值就是

$$\hat{F}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{(B_2(\boldsymbol{x})-B_1(\boldsymbol{x}))d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)y_i}{B_2(\boldsymbol{x})B_0(\boldsymbol{x})-B_1(\boldsymbol{x})^2}$$

其中 $B_r(\boldsymbol{x})=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i))^r\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i),r=1,2$。与近邻算法相比，$y_i$ 的权重系数$[(B_2(\boldsymbol{x})-B_1(\boldsymbol{x}))d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)]/N(B_2(\boldsymbol{x})B_0(\boldsymbol{x})-B_1(\boldsymbol{x})^2)$和不再是 1。当 $g(\boldsymbol{x};\{\alpha_j\}_1^p)$为二次多项式时，$\hat{F}$ 没有明确的表达式，只能运用数值方法求解。

6.1.3 样条回归

对真实函数 f 作出任何的假定都是为了缩小搜索空间 F，搜索的目的是寻找使得经验损失

$$R_{emp}(F)=\sum_{i=1}^{N}L(y_i,F(\boldsymbol{x})_i)$$

最小的函数 F^*，由于经验损失只是期望损失

$$R(F)=E_x[E_y(L(y,F(\boldsymbol{x})))|\boldsymbol{x};\alpha]$$

的估计，$R_{emp}(F^*)$的方差决定了 $R(F^*)$波动的大小，所以即使 $R_{emp}(F^*)$很小，但它的方差也可能很大。这样背离期望损失的可能性很大，即使真实函数 f 存在于搜索空间 F 中，预测的效果也不会令人满意，这就是通常所说的"过度拟合"。另外一个关键问题是：f 不一定在搜索空间 F 中，为了以更大的概率保证 f 在搜索空间中，应尽量扩大搜索空间，但无限地扩大搜索空间不仅导致实际计算的困难，更重要的是，由于样本数量有限及噪声的污染，并不能保证 f 的经验损失在所有搜索的函数 F 中是最小的，也就是说，单凭经验损失不能保证 f 的收敛性。如果要求所估计的函数比较平滑，即有连续的一、二阶导数，就是 C^2 函数，也就是将搜索空间限制在 C^2 空间。如果还是要求式(6-6)最小，则在任何一点 $\boldsymbol{x}_i$ 取值为 y_i 的 C^2 函数就使得经验损失为零，而且这种函数是存在的。这种函数只是复制样本，不能解释变量间的结构，对预测没有什么帮助，而且解不唯一。

为了减少解的不确定性，且对搜索空间 C^2 空间不加入参数限制，引入"粗糙"惩罚，一个常用的"粗糙"的衡量是拉普拉斯平方积分

$$r(F)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\int\left|\frac{\partial^2 F}{\partial x_k\partial x_l}\right|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

易知线性函数的"粗糙"为零，这样所得函数估计就是

$$\hat{F}(x)=\arg\min_F\left\{\sum_{i=1}^{N}L(y_i,F(x_i))+\lambda r(F)\right\}\tag{6-12}$$

其中 $\lambda>0$，是平滑参数，它平衡经验损失和"粗糙"的代价。随着 λ 从 0 变化到∞，估计函数从最复杂(单纯解释样本)到最简单(线性回归)。所以，λ 控制着模型的复杂性，这同核函数的步长有着同样的性质。同样，这种方法也很难推广到高维情形。对于 $n\leqslant2$ 的情况，已经证明，式(6-12)的解就是三次样条函数。

由于样条函数是分片函数，所以样条回归实质上也是分片回归(piecewise regression)，它的基本思想是在自变量取值空间 D 的不同子区域假定不同而简单的参数模型，常用的是低阶多项式，约束条件就是保证所得函数连续或者有连续的几阶导数。子区域的个数和连续导数的最高阶数决定着模型的平滑性和弹性。同样理论上将样条函数推广到高维是可行的，但实际上是很困难的，主要还是由于"纬数灾难"的原因。样条函数的子区域由 n 个变量中每个变量的 $K+1$ 个区间(由 K 个节点决定)的张积组成。由于 K 个节点的一元样条函数的基函数的个

数是 $K+q+1$，q 是分段多项式的最高次数，所以 K 节点 n 元样条函数的基函数个数是 $K+q+1$，也就是说，为了确定一个 K 节点 n 元样条函数，需要估计的系数有 $K+q+1$ 个，即使是很粗的分割区域 D(K 很小)，需要的样本量也是很大的。确定一个样条函数，首先需选定节点 $\{t_{ik}\}_1^K(i=1,\cdots,n,n\leqslant 2)$。可以用样本观测值 $\boldsymbol{x}_i$ 的每个分量作为相应变量的节点，如果样本量过大，估计最好的节点是可行的，但实际上简单的节点选择公式就足够了。一个可行的方法是选择每个变量的样本观测值 $\{x_{ik}\}(k=1,\cdots,N)$ 的 $\alpha=0.05+0.9(j-1)/(K-1)(j=1,\cdots,K)$ 的经验分位数当作该变量的节点。节点确定之后，就得通过样本估计分片多项式的系数，如果能够确定在节点处因变量的值，求解三对角线性方程组就可得到系数，但通常这些节点对应的因变量的值无法知道，这种方法实际并不可行。但是由于节点已知的样条函数存在有限的基函数，任何节点已知的样条函数都可表示成这些基函数的线性组合，所以确定节点已知的样条函数就是确定对应基函数的系数，这些系数可以由最小二乘估计求得。由于二元样条函数可以看作一元样条函数的张积，相应的基函数就是一元基函数的张积。下面给出一元样条函数的两组重要基函数：B 样条基函数和截尾次幂基函数。

对于在区间 $[a,b]$ 上节点 $t_1,\cdots,t_K$ 已知的一元 q 次样条函数，B 样条基函数是递归定义的。令 $\tau_1=\tau_2=\tau_3=\tau_4=a,\tau_{4+j}=t_j(j=1,\cdots,K)$ 且 $\tau_{5+K}=\tau_{6+K}=\tau_{7+K}=\tau_{8+K}=b$，则对 $j=1,2,\cdots,K+4$，有

$$B_j(t\mid q)=\frac{t-\tau_j}{\tau_{j+d}-\tau_j}B_j(t\mid q-1)+\frac{\tau_{j+1+q}-t}{\tau_{j+1+d}-\tau_{j+1}}B_{j+1}(t\mid q-1) \tag{6-13}$$

其中 $B_j(t\mid 0)=1,\tau_j\leqslant t\leqslant\tau_{j+1}$，否则 $B_j(t\mid 0)=0$。三次 B 样条基函数 $B_j(x)$ 就是 $B_j(x\mid 3)$，所以节点已知的三次样条函数就可表达为

$$F(x)=\sum_{j=1}^{K+4}\theta_j B_j(x)$$

基函数个数就是 $K+4$，也就是相应函数空间纬数就是 $K+4$。

q 次幂样条函数的截尾次幂基函数为 $1,\{x^j\}_1^q,\{(x-t_k)_+^q\}_1^K$，其中 t_1、…、t_K 是节点，且

$$(x-t)_+=\begin{cases}x-t & (x\leqslant t)\\ 0 & (x<t')\end{cases} \tag{6-14}$$

同样，对于三次样条函数，截尾次幂基函数个数还是 $K+4$。

6.1.4　广义累加模型

由于局部加权回归和样条回归都很难推广到高维情形，它们只是在 $n\leqslant 2$ 时取得令人满意的效果，对高维情形，假定函数是低维的展开形式，即

$$F(x)=\sum_{j=1}^{J}g_j(z_j) \tag{6-15}$$

其中 z_j 表示提前选好的自变量 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的小的子集且 z_j 中变量个数小于等于 2。这样，一个 n 个变量的多元函数由 J 个变量不超过 2 个的函数的和来表示。任何一个变量 x_i 都可以在不同的 z_j 中出现，有时为了实际问题的需要，可以附加一些条件，称为广义累加模型(generalized additive model)。由于非参数平滑方法对一元函数拟合的效果很好，如果限制 $z_i=\{x_i\}$，则模型变成

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n}g_j(x_j) \tag{6-16}$$

称为累加模型(additive model)。累加模型只有 n 项单变量函数,在实际应用中,累加模型表现出极好的稳健性。

选定变量子集 $\{z_j\}_1^J$ 后,相应的函数 $\{g_j(z_j)\}_1^J$ 可以通过非参数方法估计,同样还是要求经验损失最小,常用的损失函数是平方损失,所以

$$\{\hat{g}_j(z_j)\}_1^J=\arg\min_{g_i}\sum_{i=1}^{N}[y_i-\sum_{j=1}^{J}g_j(z_{ij})]^2 \tag{6-17}$$

对于样条函数来说,由于每一个子集 z_j 都有一组基函数,式(6-17)的解就可表示成这些基函数并集的线性组合,再通过全局的最小二乘估计得到系数(C.J. Stone, 1985)。为了保证所估计的函数的平滑性,在式(6-17)中加入"粗糙"惩罚,即

$$\{\hat{g}_j(z_j)\}_1^J=\arg\min_{g_i}\sum_{i=1}^{N}\{[y_i-\sum_{j=1}^{J}g_j(z_{ij})]^2+\sum_{j=1}^{J}\lambda_j r(g_j)\} \tag{6-18}$$

这就是存在交互作用的样条函数(C.Gu, 1990)。

直接优化式(6-18)是很难的,A.Buja (1989)提出循环的"滞后"拟合公式,联合低维非参数估计,解决以上优化问题。该程序依次重新估计

$$\hat{g}_j(z_j)\leftarrow\arg\min_{g_i}\sum_{i=1}^{N}[(y_i-\sum_{k=j}g_k(z_{ij}))-g_j(z_{ij})]^2$$

直到函数不再变化。对于每一次循环,首先计算伪残差 $y_i^*=y_i-\sum_{k\neq j}g_k(z_{ik})$,以 z_j 为自变量拟合这些伪残差,由于 z_i 的个数不大于2,局部加权回归或者样条回归等非参数平滑方法都可以采用。循环的初值可以任意选取,如 $g_j(z_j)=0, j=1,\cdots,J$。如果在每次循环估计函数 g_j 的过程中引入"粗糙"惩罚(如式(6-12)),"滞后"拟合公式就可以得到式(6-18)的解。

依靠低维非参数估计展开的广义累加模型在实际中获得很大的成功,但是作为一种多元回归方法,还存在一定的局限性。首先自变量子集 $\{z_j\}_1^J$ 不能通过样本自动选取,由于总共存在 $n(n+1)/2$ 个一元或者二元子集,且最好子集的选取取决于未知的真实函数 f,考虑到计算的复杂性以及样本的有限性,不可能把所有的子集都加入模型中,只能挑选一部分当作低维展开。其次,由于每一次的低维非参数回归都存在一个平滑参数,如核函数的步长、样条函数的节点个数、"粗糙"惩罚的 λ,同样这些平滑参数最好的选取由未知的真实函数 f 决定。如果建立一个模型选择准则,如交叉证实(cross-validation)、广义交叉证实(generalized cross-validation)确定最好的平滑参数,则需要多参数的数值优化,计算的代价很大,而且同时估计很多的平滑参数的效果不得而知。

6.1.5 投影寻踪回归

20世纪80年代国际统计界兴起的投影寻踪技术(PP)以数据的线性投影为基础,寻找线性投影中的非线性结构。因此,它可以用来解决一定程度上的非线性问题。投影寻踪回归技术(PPR)(J.H. Friedman, 1981)实质上是为了避免线性回归不能反映实际非线性原始数据的结构和特征,从而利用计算机技术,将高维数据通过线性组合的方法转换为低维数据,并在低维数据上对数据结构进行分析,最终在此基础上建立投影空间与预测对象之间的回归模型,以达到便于统计的目的。因此,PPR属于一种探索性数据分析方法(EDA),是基于"直接从审视

数据出发—通过计算机模拟—预报"建立模型的,较传统的统计方法具有一定的稳健性,适合处理高维非正态数据和一定程度的非线性问题。

投影寻踪回归模型采取用一系列岭函数的和来逼近回归函数的方法,即

$$F(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{M}S_m(\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{6-19}$$

其中 S_m 表示一元的光滑岭函数,$\boldsymbol{\beta}_m$ 是投影方向参数,M 是岭函数的个数。由于 S_m 一般是非参数的,而且 M 也是未知的,所以直接通过全局最小二乘估计是比较困难的。算法 6-2 描述了投影寻踪回归的算法,该算法依次搜索准则

$$I(\boldsymbol{\beta}_m)=1-\sum_{i=1}^{N}(r_i-S_m(\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}))^2/\sum_{i=1}^{N}r_i^2 \tag{6-20}$$

最大的 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_m$ 作为 $\boldsymbol{\beta}_m$ 的估计,S_m 是预先选定的一元非参数平滑回归方法。J.H. Friedman (1981)采用的是变步长的局部线性回归。估计出 $\boldsymbol{\beta}_m$ 和 S_m 后,改变残差为 $r_i\leftarrow r_i-S_m(\boldsymbol{\beta}_m^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x})$,作为下一次搜索式(6-20)的残差。如果所得的 $I(\boldsymbol{\beta}_m)$小于给定的阈值,则停止循环。

```
1  r_i ← y_i, M ← 0, i = 1, …, N
2  do
3      搜索使得式(6-20)最大的 β̂_m 作为 β_m 的估计
4      I(β) ← I(β̂_m)
5      r_i ← r_i − S_m(β_m^T · x)
6      M ← M + 1
7  while( I(β)大于给定的阈值)
```

算法 6-2 投影寻踪回归算法

对于变步长的一元局部线性回归,在变化大的局部,点 x 的步长 $s(x)$也较大。接下来的问题就是怎样描述点 x 的局部变化性。固定步长 s_0 的局部线性回归在点 x 的残差平方和的均值可以看作点 x 的局部变异性,同样也可以要求局部变异性也是平滑的,即再用一次平滑公式拟合所得的残差平方和均值,最终得到的平滑值当作点 x 的步长 $s(x)$。J.H. Friedman (1981)在运用变步长局部线性回归之前还通过简单的平滑算法(选取相邻三个数的中位数)(J.W. Tukey, 1977)拟合因变量值 r_i。选取相邻三个数中位数平滑算法的一个简单例子如算法 6-3 所示,J.H. Friedman (1981)的一元平滑算法全过程见算法 6-4。

原始数据:	4	7	9	3	4	11	23	1304	10	15	12	13	17
平滑数值:	?	7	7	4	4	11	12	12	15	12	13	13	?

算法 6-3 选取相邻三个数中位数平滑算法

```
1  选取相邻三个数的中位数拟合因变量值 r_i
2  计算固定步长的局部线性回归在点 x 的残差平方和的均值
3  以固定步长平滑这些均值
4  以平滑后均为步长局部线性拟合步骤 1 得到的数据
```

算法 6-4 变步长平滑算法

P. Diaconis(1984)证明任何 n 个变量的平滑函数都可以由充分大 M 的式(6-19)近似,即使对应较小的或中等的 M,许多类型的多元函数都可以由式(6-19)很好地近似(D. L. Donoho, 1989)。投影寻踪的另一个优点就是仿射不变性,也就是说,如果自变量作旋转或者尺度变化,解是不会改变的。在所有实际运用的算法中,只有投影寻踪具有这个性质。对于较小的 M,所得函数能说明自变量和因变量之间的结构关系。由于 M 不是预先固定的,要想增大一维平滑函数的个数,不必改变以前的结果,只需在以前结果的基础上重新计算即可,这样可节约大量的计算时间。投影寻踪的一个缺点是许多简单的多元函数需要很大的 M 来近似,也很难将变量间的累加效果和交叉效果区分开来,而且对于较大的 M,解释实际意义是很困难的,计算代价也是很大的。

6.2 回归树及其集成算法

通常在预测工作中,许多变量被测量,那么究竟是哪些预测变量给出了重要的预测信息,它们是如何给出这些信息的?有时为了预测的精度,假定的函数关系是很复杂的,但是复杂模型很难给出明确的实际意义。当问题的目标是理解所研究的对象,并且理解各个变量对预测的影响,那么如果一个易于理解和解释的预测函数与一个数学上复杂的预测函数具有相当的准确性,前者显然更加可取。

Breiman(1984)等四位统计学家最早提出 CART(classification and regression trees)非参数方法。CART 采用了与传统统计学完全不同的方式构建预测函数。它所构建的预测函数以二叉决策树的形式给出,非常容易理解、使用、说明和解释,它的函数形式还是累加模型,即

$$F(x) = \sum_{j=1}^{J} b_j I(x \in R_j) \tag{6-21}$$

其中,$\{R_j\}_1^J$ 表示取值空间 D 的自变量直线分割的不相交子区域,这些子区域通过二叉树的叶结点来表示;参数 $\{b_j\}_1^J$ 相当于这些子区域的取值;$\{R_j\}_1^J$ 的边界由分割变量以及该变量的分割点决定,这些分割变量以及分割点在二叉树的结点上体现。由于子区域是不相交的,式(6-21)对应的预测准则就是:如果 $x \in R_j$,则 $F(x) = b_j$。虽然由 CRAT 方法构建的预测树很简单,但它在很多情况下比常用的非参数方法构建的复杂函数预测更加准确。事实上,数据越复杂,变量越多,CRAT 比其他方法的优越性就越显著。

集成学习技术是机器学习领域近10年研究的热点之一。它试图连续地调用简单的学习算法,通过改变学习样本获得不同的基础学习器,最后将这些基础学习器组合起来,成为一个可以达到需求精度的方法。一般来说,组合学习器的复杂程度要比基础学习器高得多。相比较学习器复杂程度的增加,如果性能的改进更为显著,那么最终的学习器不仅能减小拟合误差,而且将提高泛化能力。

Freund(1997)的 Boosting 和 Breiman(1996)的 Bagging 是集成学习中最具代表性和应用前景的两类方法。两者都建立了通过投票结合起来的预测集合。它们的主要区别在于 Bagging 训练集的选择是随机的,各轮训练集之间相互独立,而 Boosting 训练集的选择不是独立的,每轮训练集的选择与前面各轮的学习结果相关;Bagging 的各个预测函数没有权重,而 Boosting 是有权重的;Bagging 的各个预测函数可以并行生成,而 Boosting 的各个预测函数只能顺序生成;对于那些极为耗时的学习方法,Bagging 可以通过并行计算节省大量的时间。

回归树的梯度 Boosting 算法(J. H. Freidman, 2001)将梯度下降技术应用于回归树中。它将每轮迭代的基础学习器(回归树)在 x 上的值看作损失函数空间在 x 上的负梯度,将基础学习器前的系数看作步长,来逼近误差函数空间的最小值。如果将 Bagging 的思想融入到回归树的梯度 Boosting 算法中去,在每次伪残差(损失函数关于 $F(x)$ 的负梯度)的训练过程中不是把所有的伪残差都用来训练,而是随机地选择一部分用来训练,就是回归树的随机梯度 Boosting 算法,最后得到的模型是一些回归树的线性组合,即

$$F(x)=\sum_{m=1}^{M}\alpha_m T_m(x) \tag{6-22}$$

其中:$T_m(x)$是一棵回归树;α_m 是线性组合的系数。这种方法具有回归树的统计性质,而且通常比单棵回归树预测的精度更高。

6.2.1 CRAT 树的生成

构建一颗回归树的基本方法是寻找这样的一些分割,即它们逐次将数据分成两个结点,每一结点中的 y 值尽可能地一致。更具体地说,假设有一个分化,形式为 $x_1<C$,它将一部分样本分进左边结点,另一部分样本分进右边结点。当然还有其他的分割,比如说 $x_2<B$,为了比较这两种分割的优劣,必须定义拟合损失准则 *LOF*(lack of fit),通过比较分割前后的 *LOF*,得出需不需要分割。如果需要分割,则选择最优的分割。最优是指在所有的变量以及每一个变量可能取的分割点(通常是样本中出现的该变量的值)中,选择使得 *LOF* 最小的那个变量及对应分割点。算法 6-5 表明了这种递归自分算法,其中

$$H[\eta]=\begin{cases}1 & (\eta\leqslant 0)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases} \tag{6-23}$$

表示阶梯函数。

算法 6-5 的第一行相当于将初始子区域当作整个取值空间,第一个循环就是重复 M_{max} 次分割,每次分割产生一个最优的基函数,因为每次循环只是在某一个叶结点分出两个叶结点,所以叶结点个数只增加 1。M_{max} 是产生的叶结点个数,也就是子区域的个数。后面 3 个循环寻找最优的基函数,即最优的分割变量 x_{v^*} 和分割点 t^*。找到之后,对应的基函数 B_{m^*}(也就是进行分割的结点)用 B_{m^*} 和 $H[-(x_{v^*}-t^*)]$ 的张积(也就是分出的左叶结点)代替,而且产生一个新的基函数(右叶结点),即 B_{m^*} 和 $H[+(x_{v^*}-t^*)]$ 的张积。*LOF* 的最小化相当于这些基函数的线性回归。

由算法 6-5 得到的基函数

$$B_m(x)=\prod_{k=1}^{K_m}H[s_{km}\cdot(x_{v(k,m)}-t_{km})] \tag{6-24}$$

其中:K_m 就是分割的次数;s_{km} 取值只能是 ±1,表示左右结点;$v(k,m)$是进行最优分割的变量;t_{km} 是相应的分割点。图 6-1 是一棵简单的二叉树,形象地表示了最后所得的基函数。递归自分算法也就是二叉树的建立过程,中间结点对应阶梯函数,从根结点到叶结点的所有阶梯函数的张积就是基函数。

分类树和回归树所采用的 *LOF* 是不同的,CART 更适合分类问题。分类树和回归树 LOF 最基本的思想是计算落入两个叶结点的数据的“纯度”以及单独一个结点的“纯度”。怎样衡量

```
1  B_1(x)←1
2  For M = 2 to M_max do: lof* ← ∞
3      For m = 1 to M - 1 do:
4          For v = 1 to n do:
5              For t ∈ {x_vj | B_m(x_j) > 0}
6                  g ← Σ_{i≠m} α_i B_i(x) +
7                      α_m B_m(x) H[+(x_v - t)] + α_M B_M(x) H[-(x_v - t)]
8                  lof ← min_{α_1,…,α_M} LOF(g)
9                  如果 lof < lof*，则 lof* ← lof;
10                 m* ← m; v* ← v; t* ← t
11         end for
12     end for
13 end for
14 B_M(x) ← B_m*(x) H[-(x_v* - t*)]
15 B_m(x) ← B_m*(x) H[-(x_v* + t*)]
16 算法结束
```

算法 6-5　CART 的递归自分算法

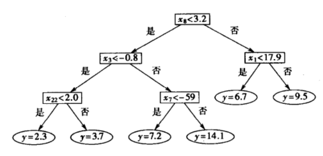


图 6-1　CART 回归树的一个例子

一组数据的数据“纯度”是必须解决的问题。分类树一般采用的是 Gini 准则、Twoing 准则和熵函数。回归树中最常用的就是方差，落入一个结点样本的 y_i 的方差计算没有问题，分割之后的两个结点的“方差”是落入每个结点样本的方差的加权平均，权重是落入每个结点样本的个数占落入没有分割之前结点样本个数的比值。有一点需要说明，y 值的方差并非 y 值离散性的唯一度量。事实上方差对异常数据非常敏感，即几个远离均值的 y 值将对 y 值的方差产生非常大的影响。一个不太敏感的度量是各个 y 值与 y 值的中位数之差的绝对值的平均值。当这一度量被用来说明 y 值的“纯度”时，各个叶结点对应的预测值将是落入该结点中样本 y 值的中位数。上面的两个度量均可用于生成 CART 回归树。不论采用何种度量，如果每个叶结点只有一个数据，那么它是“最纯的”，所以递归自分算法趋向于分出最多的叶结点。但是如前所说，虽然过大的树的拟合样本的经验损失很小，但是真的损失可能很大，也就是检验样本的损失很大，这就是所说的“过度拟合”现象。为了避免这种情况发生，必须对产生的树进行剪裁，构建一颗大小合适的树，获得较好的预测精度。

6.2.2 树的剪裁

树的剪裁的关键就是构造一种与树的生成不同的 *LOF*,这样才可能把两个结点合并成一个结点。为了便于说明,令 T_t 表示以结点 t 为根结点的二叉子树,$\mathscr{R}_T$ 表示二叉树的所有叶结点集合,$r(t)$表示结点 t 作为叶结点的损失,也就是落入结点 t 的数据的离散性的一种度量,可以是方差与中位数之差的绝对值的平均。落入结点 t 的数据不一定是样本,因为有的剪裁方法预留检验数据以度量损失。*LOF* 就是比较以结点 t 为根结点的二叉子树 T_t 的损失 $r(T_t)$ 和以结点 t 为叶结点时的损失 $r(t)$,如果 $r(T_t)>r(t)$,则把结点 t 的两个分枝都剪裁,使得结点 t 成为叶结点;否则,保留子树 T_t。二叉子树 T_t 的损失就是它的所有叶结点的损失的加权总和,有的剪裁方法认为复杂的模型也是损失,所以在二叉子树的损失中加入它的叶结点个数。剪裁的方向是与树的生成方向相反的,树的生成是从顶层逐次到底层,而树的剪裁一般是从底层逐次到顶层。有的方法为了提高计算速度,剪裁从上至下进行。以下简单介绍几种剪裁方法。

1. REP(reduced error pruning)**剪裁**

这是最简单的剪裁方法,它预留一部分数据当作检验数据,相应叶结点损失都以检验数据为准,即落入该叶结点的检验数据的离散性度量,二叉子树 T_t 的损失就是它的所有叶结点的损失的加权总和。为了避免从上至下的剪裁,这种方法规定:只有当二叉子树 T_t 的所有子树的损失都大于它本身的损失时,该子树才可以被剪裁。这种方法最大的优点就是计算复杂性与生成树的结点数成线性关系,因为每个结点只被计算一次损失;缺点是在剪裁的时候没有考虑用来训练的样本,尤其当训练样本量远大于检验样本量时,浪费了很多的信息,损失的估计偏差是很大的。

2. PEP(pessimistic error pruning)**剪裁**

这种方法没有预留一部分数据当作检验样本,所有数据都被用来生成树以及剪裁树。如果还是采用同样的 *LOF*,不可能在同样的规则下既能生成树,又能剪裁树,所以必须修改损失的估计方法。该方法简单地考虑模型的复杂度,认为一个叶结点的损失就是 1/2,所以二叉子树 T_t 损失就是它的所有叶结点损失的加权总和再加上它的叶结点个数的一半。而且为了提高剪裁速度,该方法是从上至下的,如果一个结点被剪裁,它的所有子树不用再考虑。这种方法简单地认为增加一个结点的损失是个常数,对于有些数据是合适的,大部分是不适宜的,因为模型复杂度的损失没有考虑样本,而且没有弹性。

3. CEP(critical error pruning)**剪裁**

这种方法也没有预留数据当作检验样本,它设置一个阈值,只有当子树 T_t 损失与结点 t 成为叶结点时损失之差小于阈值,该子树才被剪裁,结点 t 成为叶结点。这种方法非常类似设置阈值停止树的生成,但是该方法是从下至上的,如果在结点 t 满足剪裁条件,然而存在它的一个子结点不满足剪裁条件,则结点 t 不被剪裁。树的生成从上至下,如果在结点 t 不满足分割条件,后面就不再有子树生成。剪裁的力度显然由阈值决定,为了选择合适的阈值,首先选择一列递增的备选阈值,对每一个阈值都进行一次剪裁,得到一系列子树,然后再根据另外的准则选择一棵合适的树。

4. CCP(cost complexity pruning)**剪裁**

这是 CART 的剪裁算法,主要有以下两步:

①依照一定的规则建立生成树 T_{max} 的一列只由某个参数决定的子树，即 $\{T_{max}(\alpha_0), T_{max}(\alpha_1), \cdots, T_{max}(\alpha_L)\}$。

②在以上子树列中按照一定方法选择最优的一棵子树。

在第一步中，参数 α 可以看作增加一个叶结点带来的损失，即

$$\alpha = (r(t) - r(T_t))/(|\mathscr{B}_{T_t}| - 1)$$

在 CCP 剪裁中认为这个值是常数 1/2，这样使得模型没有弹性。α 值越大，剪裁掉的枝叶越多，最后得到的树趋于根节点；α 值越小，生成树剪裁得越少。所以目标就是根据不同的样本选择一个恰当的 α 值，使用的方法是选择一列递增的 $\{\alpha_0, \cdots, \alpha_L\}$，依次生成树 T_{max}，即由剪裁树 $T_{max}(\alpha_i)$ 得到树 $T_{max}(\alpha_{i+1})$，剪裁过程中选择值 α 为 α_i。第二步就是从生成的子树列中选择一棵最好的子树，也就是确定最优的 α 值，目标还是真实损失最小，有两种方法可以采用，第一种以检验集估计真实损失，第二种就是交叉证实。

在交叉证实中，训练样本 X 被分成 v 个不相交的部分 $X_1, \cdots, X_v$，每一部分样本 $X - X_i$ 建立一棵辅助树 T^i，总共建立 v 棵辅助树，全部样本建立树 T_{max}。同样依照前面的步骤，对于每一棵辅助树都产生一列剪裁树 $\{T^i(\alpha_0), \cdots, T^i(\alpha_L)\}$，并利用 $\{T^1(\alpha_0), \cdots, T^v(\alpha_L)\}$ 的损失估计剪裁树 $T_{max}(\alpha_i)$ 的真实损失。更精确地说，假定估计 $T_{max}(\alpha_i)$ 的真实损失等于 $T^1((\alpha_i\alpha_{i+1})^{1/2}), \cdots, T^v((\alpha_i\alpha_{i+1})^{1/2})$ 的真实损失，所以 $T_{max}(\alpha_i)$ 的真实损失估计为 $\{T^2((\alpha_i\alpha_{i+1})^{1/2}), \cdots, T^v((\alpha_i\alpha_{i+1})^{1/2})\}$ 的损失估计的均值，当然，这没有理论依据。剩下唯一的问题就是 $T^j((\alpha_i\alpha_{i+1})^{1/2})(j = 1, \cdots, v)$ 的真实损失的估计。由于有一部分样本 X_j 没有用来建立树 T^j，所以 X_j 当作检验集，经验损失就是 $T^j((\alpha_i\alpha_{i+1})^{1/2})$ 的真实损失的估计。

5. EBP(error based pruning)剪裁

这是有名的 C4.5(J.R. Quinlan, 1993)的剪裁方法，它是 PEP 方法的改进，其对真实的损失更悲观，样本全部用来生成树以及剪裁树。与 PEP 不同，EBP 从下至上遍历生成树 T_{max}，EBP 最大的特点是不仅剪裁树的枝叶，而且嫁接枝叶，嫁接的方法是把子树 T_t 移到 t 的父结点处。对于结点 t 来说，到底是剪裁还是嫁接取决于子树 t' 的损失，t 成为叶结点后的损失和以 t 的子结点 t' 为根结点的子树 $T_{t'}$ 的损失的最大值，因为每个非叶结点都有两个子结点。如果子树 T_t 的损失最小，则保留结点 t，如果 t 成为叶结点后的损失最小，则把 t 的两个分枝都剪裁，否则把对应最小的 t 的子结点 t' 连带相应的子树移到结点 t 的位置。需要解决的问题还是叶结点损失的估计问题。EBP 对损失更悲观，估计叶结点 t 的损失 $r(t)$ 为生成树时的损失的置信上限。假定落入叶结点 t 的样本的 y 值独立同分布且总体分布是正态分布，依照一般统计知识，容易得到 y 的样本方差(生成树时结点的损失估计)的置信上限。同样，二叉子树 T_t 的损失就是它的所有叶结点的损失的加权总和。

6.2.3 MARS

回归树最致命的缺点就是最后的函数在边界处是不连续的，这很大程度上影响准确性。斯坦福大学著名统计学教授 L. Friedman (1991 年) 提出 MARS (multivariate adaptive regression splines) 方法。为了确保函数的连续性，MARS 修改了递归自分算法(算法 6-5)。递归自分算法产生函数不连续的根源就是阶梯函数的张积作为基函数，如果在递归自分算法 6、14、15 行中

将所有的阶梯函数换成同样参数的连续函数，则最后函数也是连续的。由于递归自分同样条函数类似，将阶梯函数换成相应的样条函数的 q 次幂的截尾基函数。为了保证左右分割，采用两边的 q 次幂的截尾基函数

$$P_{(x)}^{(q)} = [\pm(x-t)]_{+}^{q} \tag{6-25}$$

当 $q>0$ 时，样条基函数是连续的，q 次幂的样条基函数有连续的 $q-1$ 阶导数，阶梯函数就是 $q=0$ 时的样条基函数。高纬样条基函数就是一纬样条基函数的张积，即

$$B_m^{(q)}(x) = \prod_{k=1}^{K_m} [s_{km}(x_{v(k,m)} - t_{km})]_{+}^{q} \tag{6-26}$$

以及更低次幂一元样条基函数的张积，上式中 s_{km} 取值只能是 ±1，$x_{v(k,m)}$ 表示自变量 $\boldsymbol{x}$ 的第 $v(k,m)$ 个分量，t_{km} 就是一个分点。

回归树另一个缺点就是对一些简单的函数不能提供很好的逼近，如最简单的线性函数或者累加函数，这是因为回归树中的基函数变量间交互作用很强，而线性函数或者累加函数没有交互作用。递归自分算法(算法 6-5)的主要目的是从大量的函数中选择一部分作为基函数，最后得到的模型就是这些基函数的组合。真实分布 f 与这些基函数张成的函数空间的平均距离就是模型的偏，估计的方差与基函数的个数成正比。为了提高精度，选择的基函数应该尽量接近真实函数 f，且基函数个数应该比较少。递归自分算法一次删除一个基函数，产生两个交互作用更强的基函数(没有选择重复的变量)，如果选择重复的变量，交互作用也不会减弱。总的来说，递归自分算法得到的基函数的平均交互作用有递增的趋势，但有些函数的交互作用很弱甚至没有。递归自分算法(算法 6-5)的另外一个不足就是可能连续的选择同一个变量作为分割变量，当 $q=0$ 时，产生局部累加效果，增强了回归树的适应性。但是当 $q>0$ 时，该变量在基函数中的幂次就会大于 q，而且同一个变量的不同分割的张积不会得到同样次幂的样条函数。所以为了确保得到的基函数是样条基函数，得到基函数的张积最好是不同变量的分割，并且每一个变量的幂次不超过 q。如果简单地不容许连续选择同一个变量，则局部的累加效果也会被限制。

为了弥补以上不足，MARS 又修改了递归自分算法。为了得到弱交互作用的基函数，在每一步循环中，保留父结点，一次增加两个基函数，所有的基函数(包括父结点和两个子结点)在下一步循环中都被搜索。由于基函数 $B_1(\boldsymbol{x})=1$ 一定包括在内，所以只有一个变量的基函数就能够以 $B_1(\boldsymbol{x})$ 为父结点搜索得到，同样，以一个变量的基函数作为父结点搜索得到两个变量的基函数。由于父结点的选择没有限制，任何交互作用的基函数都可以得到。如果每次选择 $B_1(\boldsymbol{x})$ 作为父结点，就得到纯粹的累加模型。父结点不被删除之后，对同一个父结点每次选择同样的变量分割得到局部累加效果，而且不会增加分割的深度，这样不需要通过连续分割同一个变量就能得到局部累加效果。自然每次搜索基函数的过程中限制候选变量集与父结点中出现的变量集不相交。

总之，MARS 在三个方面修改递归自分算法(算法 6-5)作为前向算法(算法 6-6)，其中重要的是模型连续阶数，也就是 q 的确定，这需要综合考虑统计和计算代价两个方面，通常令 $q=1$。前向算法修改内容如下：

①令截尾样条基函数 $[\pm(x-t)]_{+}^{q}$ 代替阶梯函数 $H[\pm(x-t)]$；

②每次分割之后，不删除父结点 $B_{m^*}(\boldsymbol{x})$，而且在下一步搜索过程中包括它和它的两个基

函数；

③限制每个基函数的张积是不同变量的分割。

```
1   B1(x)←1; M←2
2   Loop until M > Mmax; lof*←∞
3       For m = 1 to M-1 do:
4           For v ∉ {v(k,m) | 1≤k≤Km} do:
5               For t ∈ {xvj | Bm(xj) > 0}
6               g ← Σ_{i≠m} αi Bi(x) +
7                   αm Bm(x)[+(xv − t)]+ + αM BM(x)[−(xv − t)]+
8               lof ← min_{α1,…,αM} LOF(g)
9               如果 lof < lof*，则 lof* ← lof;
10              m* ← m; v* ← v; t* ← t
11          end for
12      end for
13  end for
14  BM(x) ← Bm*(x)[−(xv* − t*)]+
15  BM+1(x) ← Bm*(x)[+(xv* − t*)]+
16  M ← M + 2
17  end Loop
18  算法结束
```

算法 6-6　MARS 的前向算法

1. 后向算法

同回归树一样，前向算法(算法 6-6)得到的基函数过多，产生过度拟合的现象。为了得到合适数量的基函数，同样需要剪裁，MARS 的后向算法可完成这个功能。由于前向算法得到的"区域"并不是不相加的，而是可能存在重叠部分，移去一个基函数不会在自变量取值空间中产生"空洞"(只要 B_1 不被删除)，所以不必一次删除两个基函数，在回归的子集选择中一次移去一个基函数。算法 6-7 就是 MARS 的后向算法。

后向算法第一行初始化模型的基函数为前向算法得到的所有基函数，外层的循环一次删除一个基函数，内层的循环在剩下的基函数中选择某个基函数被删除。注意到 $B_1(\boldsymbol{x})$ 从来没有被删除。后向算法得到 $M_{max}-1$ 个模型序列，后一个模型总比前一个模型的基函数个数少 1，最好的模型就是 J^*。由前向算法和后向算法得到最终模型就是

$$\hat{F}(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{M} a_m \prod_{k=1}^{K_m} [\, s_{km}(x_{v(k,m)} - t_{km}) \,]_+ \tag{6-27}$$

2. 模型的选择

MARS 前向、后向算法中需要确定的是 *LOF* 以及最大基函数个数，*LOF* 实质是基于样本估计真实损失。J. Freidman(1991)采用的 *LOF* 是广义交叉证实(*GCV*)，即

1	$J^* = \{1,2,\cdots,M_{max}\}; K^* \leftarrow J^*$
2	$lof^* \leftarrow \min_{\{a_j\}j\in J^*\}} LOF(\sum_{j\in J} * a_j B_j(x))$
3	For $M = M_{max}$ to 2 do: $b \leftarrow \infty$; $L \leftarrow K^*$
4	For m = 2 to M do: $K \leftarrow \{m\}$
5	$lof \leftarrow \min_{\{a_k\}k\in K\}} LOF(\sum_{j\in K} a_k B_k(x))$
6	如果 $lof < b$，则 $b \leftarrow lof$; $K^* \leftarrow K$;
7	如果 $lof < lof^*$，则 $lof^* \leftarrow lof$; $J^* \leftarrow K$;
8	end for
9	end for
10	算法结束

算法 6-7 MARS 的后向算法

$$LOF(\hat{F}_M) = GCV(M) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[y_i - \hat{F}_M(x_i)]^2 \Big/ \Big[1 - \frac{C(M)}{N}\Big]^2 \tag{6-28}$$

LOF 明显与基函数个数 M 有关，广义交叉证实就是残差平方和均值乘以模型复杂度的惩罚，越复杂的模型会导致更大的标准误。如果模型基函数的参数（张积因子个数 K_m，分割变量 $v(k,m)$，分割点 t_{km} 以及符号 s_{km}）已知，由样本最小化 LOF 就能得到 $\{\alpha_0,\cdots,\alpha_M\}$ 的估计。复杂度惩罚函数就是

$$C(M) = \mathrm{trace}(B(B^T B)^{-1} B^T) + 1 \tag{6-29}$$

式中 B 是 $M \times N$ 阶矩阵，且 $B_{ij} = B_i(X_j)$，$C(M)$ 等于式(6-27)中线性独立的基函数个数，而且 $C(M)$ 就是参数的个数。MARS 反复利用样本构造足够多的基函数，这就减少了模型的偏，同时由于引进额外的参数增大了模型的标准误。模型偏的减少直接表示为残差平方和均值的减少（式(6-28)的分母）。另外一个能够反映该事实的复杂度惩罚函数是

$$\tilde{C}(M) = C(M) + dM \tag{6-30}$$

其中 $C(M)$ 就是式(6-29)，M 是非常数的基函数个数。常数 d 表示对每一个基函数优化的代价，是算法的平滑参数，很大的 d 会导致极少的分割，最终的模型很平滑。在一般的广义累加模型中，J. H. Friedman (1989) 建议的 d 值是 2。MARS 附加一些策略就可以得到累加模型，MARS 比累加模型有更多的优化参数。为了反映这个事实，d 值应该大于 2。d 值的选择可以看作模型的平滑程度的选择，标准的基于样本的方法如自助法（bootstap）以及交叉证实均可以选择。随机模拟表明 d 值与模型的真实损失无关，且有以下结果：

①广义交叉证实式(6-28)中的 $\tilde{C}(M)$ 是 M 的单增函数且一阶导数逐次减小；

②最有效的 d 值是 3；

③M、N、n 以及自变量的分布不影响最有效 d 值的选择；

④在所有模拟情形中，最有效的 d 值在 2 和 4 之间；

⑤如果 $2 \leqslant d \leqslant 4$，模型的真实损失变化不大；

⑥MARS 最后模型的广义交叉证实式(6-28)得分与 d 的取值中等相关。

从最后两条来看，MARS 得到的最后模型的精度（考虑真实损失）基本与 d 无关，但是以最后广义交叉证实得分作为评价模型精度的标准，则最终模型与 d 有点相关。为了得到更好的模型精度，可以采用再抽样技术。M_{max} 应该比最优模型基函数个数 M^* 大，一个好的建议是 $M_{max} = 2M^*$。

3. 连续的阶数

比起回归树，MARS 最大的优点是能够得到连续的函数，最后模型的连续阶数由一元截尾样条基函数的幂次 q 决定。如果目的只是精确地估计函数而不考虑各阶导数连续的问题，附加导数的连续性没有什么意义。对于二阶导数局部很大的真实函数，在回归模型中附加一阶导数连续的条件也不会大幅度地提高精度。如果在一阶导数之外还附加连续性，则所得的模型的精度不会很高，尤其在高纬情形。在样条回归模型中，损失很大部分是接近自变量取值空间 D 的边界点 $\boldsymbol{x}$ 产生的，这在高纬情形表现更严重。在边界区域拟合高阶多项式或者样条函数导致很大的方差，这主要是因为在边界上没有限制。一个简单的方法就是在取值空间的边界用线性回归拟合，MARS 通过令 $q=1$ 保证分片线性近似。分片线性近似当然不会产生连续的导数，连续导数 q 的值至少大于或等于 2，这就会出现以上的问题。MARS 重新调整 $q=1$ 时的样条，使得最后模型存在连续的一阶导数。由前向算法和后向算法得到的最终模型式(6-27)包括以下形式函数的张积：

$$b(x \mid s,t)=[s(x-t)]_+ \tag{6-31}$$

MARS 用一阶导数连续的截尾三次函数

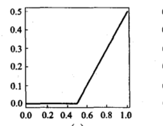
$$\begin{aligned}
&C(x \mid s=+1,t_-,t,t_+)=\begin{cases}0 & (x\leqslant t_-)\\ p_+(x-t_-)^2+r_+(x-t_-)^3 & (t_-<x<t_+)\\ x-t & (x\geqslant t_+)\end{cases}\\
&C(x \mid s=-1,t_-,t,t_+)=\begin{cases}-(x-t) & (x\leqslant t_-)\\ p_-(x-t_+)^2+r_-(x-t_+)^3 & (t_-<x<t_+)\\ 0 & (x\geqslant t_+)\end{cases}
\end{aligned} \tag{6-32}$$

其中 $t_-<t<t_+$，令

$$\left.\begin{aligned}
p_+&=(2t_++t_--3t)/(t_+-t-)^2\\
r_+&=(2t-t_+-t_-)/(t_+-t-)^3\\
p_-&=(3t-2t_--t_+)/(t_--t_+)^2\\
r_-&=(t_-+t_+-2t)/(t_--t_+)^3
\end{aligned}\right\} \tag{6-33}$$

则 $C(x \mid s,t_-,t,t_+)$ 连续并且一阶导数连续，在点 $x=t_\pm$ 处二阶导数不连续。每一截尾线性函数式(6-31)只有一个分割点，而三次截尾函数式(6-32)、式(6-33)存在三个分割点：中间分割点 t，左右分割点 $t_\pm$。图 6-2 比较了这两种函数。

由前向算法和后向算法得到的基函数的每一个因子式(6-31)用三次截尾样条函数式(6-32)、式(6-33)代替，最后的模型就会存在连续的一阶导数。中间分割点 t 还是原来一次截尾样条函数的分割点式(6-31)，左右分割点选择使得二阶导数不连续的点最少。MARS 是如下选择的，对于式(6-27)中的每一个基函数 m 有一个分割点集 $\{t_{km}\}$，对应着变量集合 $\{v(k,m)\}_1^{K_m}$，把每个自变量 $x_{v(k,m)}$ 看作空间的一根轴，则对应的分割点就是该轴的坐标，所以分割点集 $\{t_{km}\}$ 就是 K_m 维空间的一个点。将所有 K_m 相同的基函数对应的分割点集 $\{t_{km}\}$ 投影到 $\mathbf{R}^{k_m}$ 空间，每根轴上分布一些点，这些点就是对应变量的三次截尾基函数的中间点 t，相邻的两个点的中点既是一个函数的 t_+，又是另一个函数的 t_-。最小或最大的点 t 不会和其他点相邻，对应的 t_- 或 t_+ 就是它和轴的最小值或最大值的中点。虽然有着相同变量个数的基函数



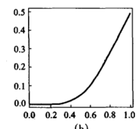


图 6-2　一次与三次截尾样条函数比较
(a)一次截尾样条函数;(b)三次截尾样条函数

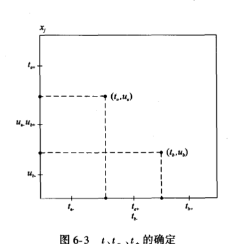


图 6-3　t、t_-、t_+ 的确定

的变量并不一定相同,如 B_i 只与变量 x_1、x_2 有关,而 B_j 与 x_3、x_4 有关,但这并不影响在 $\mathbf{R}^2$ 空间的投影,确定完 t、t_-、t_+ 之后,写回三次截尾函数时将变量换成 x_1 或者 x_3 即可。图 6-3 演示了这种方法。点 $t_\pm$ 对于基函数的贡献和点 t 是一样的,而且在边界处比线性截尾函数有着更好的性质。最重要的就是每个基函数的单变量因子的斜率不会超过 1。

4. 分割点优化

MARS 的前向算法通过单变量的平滑公式的张积构成基函数,得到的模型式(6-27)可以看作以下形式:

$$\hat{F}(\boldsymbol{x}) = \hat{F}_{mv}(\boldsymbol{x}) + B_m(\boldsymbol{x})\phi_{mv}(x_v) \tag{6-34}$$

其中

$$\hat{F}_{mv}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{V(i)\neq V(m)\\ V(i)\neq V(m)+\{v\}}} \alpha_i\beta_i(\boldsymbol{x}) \tag{6-35}$$

$V(m) = \{v(k,m)\}_1^{K_m}$,表示第 m 个基函数对应的变量集合,且函数

$$\phi_{mv}(x_v) = c_0 + \sum_{j=1}^{J} c_j[s_j(x_v - t_j)]_+ \tag{6-36}$$

该式正好是一元线性样条回归的形式。式(6-34)的第二项将变量集 $V(m)$ 和变量 v 对第 m 个基函数的贡献分开,式(6-35)表示其他基函数的贡献。最小化 LOF 式(6-29)得到单变量函数 ϕ_{mv} 的系数 $\{c_0,\cdots,c_J\}$ 以及其他基函数系数 $\{\alpha_i\}$ 的估计。

令 $R_{mv} = y - \hat{F}_{mv}$,则优化可写成

$$E[R_{mv} - B_m\phi_{mv}(x_v)^2] = \min \tag{6-37}$$

多元问题就简化到一元的情形,如果固定系数 $\{\alpha_i\}$,则式(6-37)的解就是

$$\phi_{mv}(x_v) = E\left[B_m^2\left(\frac{R_{mv}}{B_m}\right) \mid x_v\right] \Big/ E[B_m^2 \mid x_v] \tag{6-38}$$

即关于 x_v 的权重为 B_m^2 的加权平滑 R_{mv}/B_m。

MARS 前向算法选取每一个非零权重的观测值确定分割点，J.H. Freidman(1989)指出，这将会导致线性平滑只有一个观测值的局部最小区间，如果样本存在噪音，则函数估计的局部方差很大。由于真实函数 f 并不可知，当然也无法计算噪音的正负。通常假定真实函数比噪音更平滑，所以在平滑公式中附加一个最小区间，使得在残差中出现的噪声不敏感。在分片线性平滑中就是两个分割点之间(非零权重)观测值的最小个数 L，对于对称的误差分布，大于零和小于零的概率都是 1/2，所以取 $L = L^*/2.5$，且 L^* 就是

$$P(L^*) = \alpha \tag{6-39}$$

其中：$P(L^*)$是 nN_m 次投掷硬币中出现游程(即连续出现正面或者反面)的长度大于或等于 L^* 的概率；N_m 是 $B_m > 0$ 的观测值个数；α 是置信水平，一般取 $\alpha = 0.05$ 或者 $\alpha = 0.1$。因为基函数 B_m 的新分割点的可能的位置是 nN_m 个，所以投掷 nN_m 次。

当 $nN_m \geqslant 10$ 且 $\alpha < 0$ 时，L^* 的一个较好近似为

$$L(\alpha) = -\log_2\left[-\frac{1}{nN_m}\ln(1-\alpha)\right]/2.5 \tag{6-40}$$

因为在每一个游程中有 2 到 3 个分割点不会影响分片线性平滑的精度，所以式(6-40)除以 2.5。在式(6-40)的条件下，以 $1-\alpha$ 的概率保证在变量取值区间中不会连续出现正的或负的误差。式(6-40)不能推广到区间的边界点，因为 $L(\alpha)$指的是两个分割点之间的观测值个数，而不是区间边界和最大或最小分割点之间的观测值个数，而且边界的性质对估计的精度影响很大，必须在边界调整 L。由于一个长度大于或等于 L^* 的游程在边界出现的概率为 2^{-L^*+3}，n 个变量对应 n 个取值区间，所以边界出现游程的概率就是

$$P(L^*) = n2^{-L^*+3}$$

因而在最大、最小分割点和区间边界中至少需要

$$Le(\alpha) = 3 - \log_2(\alpha/n)$$

个观测值保证在取值区间不会出现游程。$Le(\alpha)$和 $L(\alpha)$都对 α 敏感，$L(0.01) - L(0.05)$和 $Le(0.01) - Le(0.05)$差不多都是 2、3 个观测值。任何情况下，由于没有考虑游程中误差的大小，所以两个表达式都只是一种近似。

6.2.4 Boosting 和 Bagging

以 Boosting 操纵训练样本来产生多个假设，它主要包括两个系列，即 Boost-by-majority 和 AdaBoosting。Boosting 在训练样本上维护一套概率分布，在每一轮迭代中 Boost-by-majority 通过重取样本生成不同的训练集，而 AdaBoosting 在每个实例上调整这种分布。在分类问题中，AdaBoosting 用成员分类器在训练样本上的错误率来调整训练实例上的概率分布。权重改变的作用是在被误分的样本上设置更多的权重，在分类正确的例子上其权重将减小。最终分类器通过单个分类器的加权投票建立起来，每个分类器按照其在训练集上的精度加权。算法设计能增强效果差的样本的学习能力，但是也有可能使最后的组合算法过于偏向几个特别的样本，导致算法不太稳定。尤其是在样本有噪声的情况下，Boosting 的最终效果可能很差。

Boosting 方法有两种不同的使用方式，即使用带权的样本和按概率重取样本。Quinlan.J.R(1996)通过实验发现，前者效果优于后者。Breiman L(1998)提出 Arcing(Adaptive Resample and Combine)的概念，认为 Boosting 是 Arcing 算法族的一个特例。在此基础上，他设计出 Arc-x4 算

法。该算法在产生新的学习器时，样本的权的变化与已有的所有学习器都有关。奇怪的是，通过实验发现，与 AdaBoost 相反，按概率重取样本的 Arc-x4 优于使用带权样本的 Arc-x4。

Bagging 的基础是重复取样，它通过产生样本的重复 Bootstrap 实例作为训练集，每次运行，Bagging 都给学习算法提供从大小为 n 的原始训练集随机抽取的 m 个训练样本的集合。这种训练集被称作原始训练集合的 Bootstrap 复制，这种技术也叫 Bootstrap 综合，即 Bagging。平均来说，每个 BoostStrap 复制包含原始训练集的 63.2%，原始训练集中的某些样本可能在新的训练集中出现多次，而另外一些样本则可能一次也不出现。Bagging 通过重新选取训练集增加了基础学习器集成的差异度，从而提高了泛化能力。稳定性是 Bagging 能否发挥作用的关键因素，Bagging 能提高不稳定学习算法的预测精度，而对稳定的学习算法效果不明显，有时甚至使预测精度降低。学习算法的稳定性是指如果训练集有较小的变化，学习结果不会发生较大变化。基于实例回归方法是稳定的，而决策树、神经网络等方法是不稳定的。研究发现，一般情况下，Bagging 方法总是可以改变学习系统的性能；而 Boosting 方法在有效时效果比 Bagging 还好，但在无效时却可能使学习系统的性能恶化。

1. AdaBoost 算法研究

为了解决原有 Boosting 算法必须知道弱学习算法学习正确率的下限的问题，Freund 和 Schapire 于 1995 年提出了 AdaBoost (Adaptive Boost)算法，该算法的效率与 Freund Y. (1995)方法的效率几乎一样，却可以非常容易地应用到实际的分类问题中。给定一个训练集(x_1, y_1)，…，(x_N, y_N)，初始化时指定每个观测值的权值为 $1/N$，并按照该权重调用弱学习器对训练集进行训练。每次训练后，根据训练效果更新训练集上的权值，训练效果差的样本获得大权重，并在下轮中加强训练。迭代 T 轮，最终得到一个估计序列 $h_1, \cdots, h_t$，每个估计都具有一定的权重，最终的估计 H 是采用有权重的投票方式获得，AdaBoost 算法伪代码如算法 6-8，最终的预测函数是

$$F(x) = \sum_{i=1}^{T} w_i h_i(x)$$

2. Bagging 算法研究

1996 年，Breiman. L 提出 Bagging 算法。其算法原理如下，给定一数据集 $L = \{(x_1, y_1), \cdots, (x_N, y_N)\}$，基础学习器为 $h(x, L)$。如果输入为 x，就通过基础学习器来预测 $h(x, L)$。现在，假定有一个数据集序列$\{L_k\}$，每个序列都由 m 个与 L 独立同分布的观察值组成。任务是使用基础学习器来得到一个更好的学习器，它比单个数据集学习器 $h(x, L)$要强，这就要使用学习器序列$\{(h(x, L_k))\}$。如果 Y 是数值的，一个明显的过程是用 $h(x, L_k)$在 k 上的平均取代 $h(x, L)$，即 $h_A(x) = E_L h(x, L)$，其中 E 表示 L 上的数学期望，h_A 的下标 A 表示综合。尽管通常只有单个数据集 L 而无多余的 L 复制，仍然可以模仿导出 h_A 的过程。在 L 中取重复的 Bootstrap 样本$\{L^{(B)}\}$，形成$\{h(x, L^{(B)})\}$。如果 y 是数值的，则取

$$h_B(x) = \text{avg}_B(x, L^{(B)})$$

这种过程被称为“Bootstrap 综合”或“Bagging”。

```
1  U = (1/N,…,1/N)//样本的初始权重
2  for(j=1;j<T;j++)
3  {
4  hj = p(x,y,U)//生成预测函数 hj
5  e = ∑L(yi,hj(xi))Ui
6  if(e>给定值)
7  {
8  j = T
9  }
10 wj = log((1-e)/e)//预测函数权重
11 for(i=1;i<N;i++)
12     if(hj(xi≠yi))
13        Ui = Ui(2e)//调整样本权重
14     else
15        Ui = Ui/(2(1-e))
16 for(i=1;i<N;i++)
17 Ui = Ui/∑i Ui//使∑i Ui = 1
18 }
```

算法 6-8 AdaBoost 算法

6.2.5 梯度 Boosting

梯度 Boosting 不同于 AdaBoost，AdaBoost 算法改变样本的权值，但并不改变样本本身。梯度 Boosting 算法改变样本但并不改变样本权值，还有一类 Boosting 算法同时改变样本和样本权值。梯度 Boosting 算法改变样本的方法主要来源于数值优化中的最速下降法。

假设求解最优化问题

$$P^* = \arg\min \Phi(p)$$

其中 $\Phi(p)$是多元参数 p 的函数，最速下降法是数值优化中最简单又最重要的一种方法，它从参数空间的任一个初值 p_0 开始，每次在当前位置 p_{m-1}使得函数 $\Phi(p)$值在下降最快的方向上滑动一点点，从而最后达到局部最优点。可以证明，最速下降方向就是该点的梯度方向

$$g_m = \{g_{jm}\} = \left[\frac{\partial \Phi(p)}{\partial p_j}\right]_{p=p_{m-1}}$$

的反方向，其中

$$p_{m-1} = \sum_{i=1}^{m-1} p_i$$

第 m 步就是 $-\rho_m g_m$，且

$$\rho_m = \arg\min \Phi(p_{m-1} - \rho g_m)$$

所以

$$p_m = p_{m-1} - \rho_m g_m$$

在回归或者机器学习问题中，所搜索的空间是函数空间，不是欧式空间，空间中的每一个点都是一个函数。优化函数还是采用经验损失函数式(6-6)，按照最速下降的步骤，假定搜索空间 $F(x)=\sum_{i=1}^{M}h(x;\beta)$是一些基函数 $h(x;\beta)$的线性组合，$h(x;\beta)$由参数 β 确定。$h(x;\beta)$可以是任何形式的不稳定的函数，但是考虑到回归树的优良性质，而且回归树是不稳定的，这里选取基函数 $h(x;\beta)$为回归树 $T(x)$。梯度 Boosting 算法如算法 6-9。

```
1  F0(x) = 0
2  for(m = 1; m < = M; m + + )
3  {
4  (αm, Tm(x)) = argmin_{α,T(x)}
5      Σ_{i=1}^{N} L(yi, Fm-1(xi) + αTxi)
6  Fm(x) = Fm-1(x) + αmTm(x)
7  }
8  F(x) = FM(x) = Σ_{i=1}^{M} αmTm(x)
```

算法 6-9 梯度 Boosting 算法

算法 6-9 中第 1 行初始化函数为常数函数 0，2～7 行循环 M 次，每次循环得到一个预测函数 $F_{m-1}(x)$。第一次循环预测函数是 $F_0(x)=0$，以后的就是前 $m-1$ 棵树的线性组合。4～5 行就是建立一棵树 $T_m(x)$以及相应的组合系数 $\alpha_m(x)$，然后增加到当前的线性组合 $F_{m-1}(x)$，得到的预测函数 $F_m(x)$就是下一步循环的初始函数。在第一步中，因为 $F_0(x)=0$，所以 $\alpha_1T_1(x)$就是前面介绍的标准的回归树建立方法。第二步，最优的树 T_2 以及组合系数 α_2 增加到 $T_1(x)$，所以 $F_2(x)=\alpha_1T_1(x)+\alpha_2T_2(x)$。这个过程重复 M 步，最后的模型就是 M 棵树的线性组合。

梯度 Boosting 算法的潜在困难就是每一步怎样建立最优的回归树，损失函数在 $F(x)=F_{m-1}(x)$的梯度

$$g_m(x_i)=\left[\frac{\partial L(y_i,F(x_i))}{\partial F(x_i)}\right]_{F(x)=F_{m-1}(x)}$$

的反方向 $-g_m=\{-g_m(x_i)\}_1^N$ 是空间 $\mathbf{R}^N$ 的一个点，而且不能推广到其他的 x，不能形成 x 的函数。一个自然的推广就是利用伪残差$\{\tilde{y}_i=-g_m(x_i)\}_1^N$ 构造回归树 $T_m(x)$。即将算法 6-9 第 4～5 行分成两步，首先利用样本$\{x_i,\tilde{y}_i\}_1^N$ 建立一棵回归树 $T_m(x)$，然后一维搜索

$$\alpha_m=\arg\min\sum_{i=1}^{N}L(y_i,F_{m-1}(x_i)+\alpha T_m(x))$$

这样避免了直接搜索函数空间，充分利用了回归树算法，解决了数值搜索的困难。

在回归树的建立过程中，由于剪裁算法是假定最后只选择一棵树，而 Boosting 通常包含上百棵树，不必剪裁出相对一棵树最优的回归树，所以在每次循环中固定回归树的叶结点个数为 J。J 一般较小，但不能太小，典型的选择是 $4\leqslant J\leqslant 10$。这在随机模拟中表现得很好，只要 $4\leqslant J\leqslant 10$，预测精度也相当稳健。

回归树可以写成以下累加形式：

$$h(x;\{b_j,R_j\}_1^J)=\sum_{j=1}^{J}b_jI(x\in R_j) \tag{6-41}$$

$\{R_j\}_1^J$ 是自变量 x 取值空间的一个不相交的分割，由二叉树的叶结点确定。所以梯度 Boosting 算法就是

$$F_m(x)=F_{m-1}(x)+\alpha_m\sum_{j=1}^{J}b_jI(x\in R_{jm})=F_{m-1}(x)+\gamma_{jm}I(x\in R_{jm}) \tag{6-42}$$

其中：$\gamma_{jm}=\alpha_m b_{jm}$；$\{R_{jm}\}_{j=1}^J$ 是第 m 次循环的自变量空间分割；$\{b_{jm}\}$ 是落入区域 R_{jm} 的 $\tilde{y}_i$ 的均值，即

$$b_{jm}=\underset{x_i\in R_{jm}}{\mathrm{avg}}\,y_i$$

式(6-42)就是在每步循环中加入 J 个阶梯基函数 $\{I(x\in R_{jm})\}_{j=1}^J$，而不是仅仅一个基函数。所以可以一次寻求这些阶梯基函数的最优系数来提高拟合的质量，即

$$\{\gamma_{jm}\}_{j=1}^J=\arg\min\sum_{i=1}^{N}L(y_i,F_{m-1}(x_i)+\gamma_jI(x\in R_{jm}))$$

由于分割区域是不相交的，还可进一步简化为

$$\gamma_{jm}=\arg\min\sum_{x_i\in R_{jm}}L(y_i,F_{m-1}(x_i+\gamma)) \tag{6-43}$$

这就是每一个叶结点确定的区域的最优取值，给定函数 $F_{m-1}(x)$，γ_{jm} 完全取决于损失函数 L。对于绝对损失函数，式(6-43)就是

$$\gamma_{jm}=\underset{x_i\in R_{jm}}{\mathrm{median}}\{y_i-F_{m-1}(x_i)\}$$

系数 γ_{jm} 就是第 m 次循环落入第 j 个叶结点的伪残差

$$\tilde{y}_i=-\left[\frac{\partial L(y_i,F(x_i))}{\partial F(x_i)}\right]_{F(x)=F_{m-1}(x)}=\mathrm{sign}(y_i-F_{m-1}(x_i)) \tag{6-44}$$

的中位数，伪残差就是当前残差 $y_i-F_{m-1}(x_i)$ 的符号，这使得计算异常简单。整个绝对损失函数的回归树的梯度 Boosting 算法如算法 6-10 所示。

```
1  F0(x) = median{yi}1^N
2  for(m = 1; m < M; m + +)
3  {
4  ỹi = sign(yi - F_{m-1}(xi)), i = 1,…,N
5       {Rjm}_{j=1}^J = J 个叶结点的回归树({ỹi, xi}1^N)
6  γjm = median_{xi∈Rjm}{yi - F_{m-1}(xi)}, j = 1,…,J
7  Fm(x) = F_{m+1}(x) + γjm I(x ∈ Rjm)
8  }
9  算法结束
```

算法 6-10　绝对损失函数的梯度 Boosting 算法

这种算法是极其稳健的，回归树的建立只是自变量 x_j 的次序信息，并且伪残差 $\tilde{y}_i$ 取值只是 ±1。叶结点的改变只与中位数有关。另一种建立回归树的方法是直接最小化绝对损失函数，即

$$\text{tree}_m(x) = \arg\min \sum_{i=1}^{N} |y_i - F_{m-1}(x_i) - \text{tree}(x_i)|$$

$$F_m(x) = F_{m-1}(x) + \text{tree}_m(x)$$

由于式(6-42)中分割区域的确定过程中采用的是平方损失函数，而在搜索分割变量以及分割点时，最小二乘估计比绝对损失速度快很多，所以式(6-42)的计算速度比直接最小化绝对损失函数快很多。

对于不同的损失函数，其梯度是不同的，伪残差也略有差别。常用的平方损失 $L(y,F)=(y-F)^2$ 的伪残差 $\tilde{y}_i = y_i - F_{m-1}(x_i)$，而 Huber 损失函数式(6-2)的伪残差是

$$\tilde{y}_i = -\left[\frac{\partial L(y_i, F(x_i))}{\partial F(x_i)}\right]_{F(x)=F_{m-1}(x)} = \begin{cases} y_i - F_{m-1}(x_i) & (|y_i - F_{m-1}(x_i)| \leqslant \delta) \\ \delta \cdot \text{sign}(y_i - F_{m-1}(x_i)) & (|y_i - F_{m-1}(x_i)| > \delta) \end{cases}$$

而 logistic 损失函数式(6-4)的伪残差就是

$$\tilde{y}_i = -\left[\frac{\partial L(y_i, F(x_i))}{\partial F(x_i)}\right]_{F(x)=F_{m-1}(x)} = 2y_i/(1+\exp(2y_iF_{m-1}(x_i)))$$

一维搜索系数

$$\gamma_{jm} = \arg\min \sum_{x_i \in R_{jm}} \log(1+\exp(-2y_i(F_{m-1}(x_i))))$$

它的一个近似就是

$$\gamma_{jm} = \sum_{x_i \in R_{jm}} \tilde{y}_i \Big/ \sum_{x_i \in R_{jm}} |\tilde{y}_i|(2|\tilde{y}_i|)$$

由于两类 logistic 回归第 m 次循环中的经验损失函数

$$\phi_m(\alpha; T_m(x)) = \sum_{i=1}^{N} \log[1+\exp(-2y_iF_{m-1}(x_i))\cdot\exp(-2y_i\alpha T_m(x_i))] \tag{6-45}$$

如果 $y_iF_{m-1}(x_i)$ 充分大，则 $\alpha T_m(x_i)$ 对式(6-45)的影响很小，也就是说观测 (y_i, x_i) 对损失函数没有贡献，所以在优化的过程中可以删去这个观测值。自然，

$$\omega_i = \exp(-2y_iF_{m-1}(x_i)) \tag{6-46}$$

可以看作第 m 次循环中第 i 个观测值对系数估计的权重。从非参数的观点来看，损失函数关于 $F(x_i)$ 的二阶导数是观测值 (y_i, x_i) 对优化的贡献，即第 m 次循环中第 i 个观测值对系数估计的权重的另外一个度量

$$\omega_i = |\tilde{y}_i|(2-|\tilde{y}_i|) \tag{6-47}$$

对系数估计影响较小的观测值可以不必考虑，临界值 $\omega_l(\eta)$ 可以如下确定：

$$\sum_{i=1}^{l(\eta)} \omega_i = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \tag{6-48}$$

其中 $\{\omega_{(i)}\}_1^N$ 是 $\{\omega_i\}_1^N$ 从小到大的排序，η 典型的选择是 $\eta \in [0.05, 0.2]$，ω_i 如式(6-46)或者式(6-48)定义。通常 90% 到 95% 的观测值被删除而不会影响估计的精度，这大大地提高了运算的速度。

6.2.6 梯度 Boosting 模型的控制

即使限制每一棵树的叶结点数，只要树的棵数足够大，梯度 Boosting 模型的经验损失可以任意小，但是同前一样，过度的拟合会导致真实损失的增大。在开始的时候，真实损失随着 M

的增大而减小，到达 M^* 时，真实损失最小，当 $M > M^*$ 时，真实损失随着 M 的增大而增大，所以 M^* 是最优树的棵数。M^* 取决于真实函数 f、样本量 N 和噪声，而且 M^* 未知，只能从样本中估计得到。将样本分为训练样本和检验样本，利用交叉证实估计参数是可行的方法。控制模型规模 M 的大小并不是提高预测精度的唯一方法，另一个常用的方法就是 shinkage，在梯度 Boosting 算法中(算法 6-9)将第 6 行替换成

$$F_m(x) = F_{m-1}(x) + (\upsilon \cdot \alpha_m) T_m(x) \tag{6-49}$$

在每一步中估计得到的树只有一部分对最终的模型有贡献，控制的因子就是 $0 \leqslant \upsilon \leqslant 1$。shrinkage 或者学习速度参数 υ 限制损失增加的速度，小的 υ 值需要更多的树加入到模型中去。随机模拟表明，小的 υ 值极大地提高了梯度 Boosting 算法的精度，同时增加了计算的负担。当 $\upsilon \leqslant 0.1$ 时，精度的提高不再明显。式(6-49)的引进纯粹是凭借经验，它成功的原因还是一种惩罚的措施。假定模型包含所有可能的 J 个叶结点的回归树：

$$\hat{F}(x) = \sum \hat{\alpha}_m T_m(x) \tag{6-50}$$

其中

$$\{\hat{\alpha}_m\} = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^{N} L\left(y_i, \sum \alpha_m T_m(x)\right) + \lambda \cdot P(\{\alpha_m\}) \tag{6-51}$$

这就是惩罚的线性回归，式(6-51)前一项就是经验损失，后一项就是系数$\{\alpha_m\}$的惩罚。由于所有 J 个叶结点的回归树的棵数是无穷的，所以惩罚是必须的，λ 控制惩罚的力度。统计学中常用的惩罚就是岭惩罚

$$P(\{\alpha_m\}) = \sum \alpha_m^2 \tag{6-52}$$

这种惩罚也是支持向量回归用到的惩罚措施，它偏向小的系数。另一种方法是

$$P(\{\alpha_m\}) = \sum |\alpha_m| \tag{6-53}$$

它实质是 l_1 范数，也偏向小的系数。式(6-52)和式(6-53)同样惩罚绝对值较大的系数，不同之处在于方差的处理效果不一样。式(6-52)厌恶方差，它倾向绝对值相等的系数，而且没有一个系数为零；式(6-53)对方差漠不关心，它倾向系数为零，但是方差很大。最好的惩罚策略取决于未知的最优系数，一方面，如果这些系数中很多绝对值接近，则式(6-52)会得到更好的结果；另一方面，如果这些系数离散度很高，尤其是存在少量的大值，许多系数却很小时，式(6-53)的效果更好。T. Hastie(2001)指出当采用惩罚策略式(6-53)时，shrinkage 式(6-49)和线性惩罚回归式(6-50)、式(6-51)存在联系，得到的系数非常类似。树的棵数 M 同惩罚力度 λ 有关，小的 λ 得到更多的树。当 $\upsilon \leqslant 0.1$ 时，式(6-49)就可以看作所有 J 个叶结点的回归树的惩罚式(6-53)的线性回归。

6.2.7　随机梯度 Boosting

借助于 Bagging 的思想，将随机选择样本作为梯度 Boosting 算法(算法 6-11)的一部分。确切地说，在每一次循环过程中，从全部样本中随机地抽取一部分建立回归树(第 5 行)以及相应的组合系数(第 6 行)。令$\{y_i, x_i\}_1^N$ 表示全部样本，$\{\pi(i)\}_1^N$ 表示自然数$\{1, \cdots, N\}$的一个随机排序，则一个随机子样本就是$\{y_{\pi(i)}, x_{\pi(i)}\}_1^{\tilde{N}}$，且 $\tilde{N} < N$。随机梯度 Boosting 算法如算法 6-11 所示。

当 $\tilde{N} = N$ 时，没有随机选择样本，则算法 6-11 就是算法 6-10。比例 $k = \tilde{N}/N$ 越小，紧接

1 $F_0(\boldsymbol{x}) = \arg\min_\gamma \sum_{i=1}^{N} L(y_i, \gamma)$

2 $for(m = 1; m <= M; m++)$

3 {

4 $\tilde{y}_{\pi(i),m} = -\left[\frac{\partial L(y_{\pi(i)}, F(\boldsymbol{x}_{\pi(i)}))}{\partial F(\boldsymbol{x}_{\pi(i)})}\right]_{F(x)=F_{m-1}(x)}, i = 1, \cdots, \tilde{N}$

5 $\{R_{jm}\}_{j=1}^{J}$ = J 个叶结点的回归树($\{\tilde{y}_{\pi(i)}, \boldsymbol{x}_{\pi(i)}\}_1^{\tilde{N}}$)

6 $\gamma_{jm} = \arg\min \sum_{x_i \in R_{jm}} L(y_{\pi(i)}, F(\boldsymbol{x}_{\pi(i)}))$

7 $F_m(x) = F_{m-1}(x) + \nu \cdot \gamma_{jm} I(x \in R_{jm})$

8 }

算法 6-11 随机梯度 Boosting 算法

着的两次循环选择的子样本不同的概率越大，整个算法的随机性也越大。由于选择部分样本，计算的代价以比例 k 减少，但是在每次循环中使用较少样本，回归树的偏会增大。随机模拟表明，k 最好的选择在 0.5 左右。

回归树的随机梯度 Boosting 几乎拥有回归树的所有优良性质，单棵树的最大缺点是不连续，而 Boosting 是许多树的线性组合，所以很大程度上提高了预测的精度。Boosting 同样极大地减少了单棵树的不稳定性，从统计学角度来看，平均减少方差。最后 Boosting 大大减轻了单棵树分割的难度，每一棵小树可以包括不同的变量，这样各种交互作用都可以体现，使得最后的模型更加稳健。

6.3 赤潮的混合回归预测

本节首先建立每个影响因子的非线性回归模型，然后作总体线性回归，首次给出了用混合回归模型预报赤潮的方法。这样就改进了现有的用多元线性回归模型进行赤潮预报的方法，提高了赤潮预报的准确性。

6.3.1 澳头水域特点及数据的量化

大量的研究结果表明，赤潮发生的控制因素主要可分为：物理因素（风、光照、气压等气象、气候因素，沿岸流、潮汐运动、海水的垂直混合等水动力条件，海水温度、盐度等海水的物理性质）、化学因素（营养盐、微量元素）、生物因素（赤潮生物间的竞争和互助、细菌与浮游动物对赤潮生物的影响）。

当然对于不同水域，影响赤潮生物生长的主要因素也不相同。林祖享(2000)的研究表明，大亚湾澳头水域污染不严重，水质状况较稳定，浮游植物种群丰富，赤潮的消长主要与水温、天气状况（影响赤潮生物的生长繁殖）和潮汐、风向的变化（影响赤潮生物的迁移、扩散、聚集）等物理因子关系密切。在此基础上，本节结合澳头水域 2001 年 5 月份发生赤潮期间的现场观测数据（表 6-2）；给出相应的分析结果。即先由单因子非线性回归分析（韦博成，1989），建立因子 $X_i\ (i = 1,2,3,4)$ 和 Y 的非线性回归模型 $Y_i = f_i(X_i)$，然后建立 Y_1、Y_2、Y_3、Y_4 和 Y 的多元线性回归模型，从而可以得出用于预报的混合回归模型，即

$$Y = f(X) = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3 + a_4 Y_4 + a_0$$

$$= a_1 f_1(X_1) + a_2 f_2(X_2) + a_3 f_3(X_3) + a_4 f_4(X_4) + a_0 \tag{6-54}$$

其中 $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$。

表 6-2　2001 年 5 月澳头水域各因子计算参数

日期	水温(X_1)(℃)	潮汐类型(X_2)	风向(X_3)	天气状况(X_4)	实测细胞数(Y)
2005 - 03	23.0	2	2	2	0.01
2005 - 04	23.0	1	8	3	0.00
2005 - 05	23.5	1	7	4	0.00
2005 - 06	25.0	1	8	4	0.00
2005 - 07	25.0	1	7	4	0.00
2005 - 08	25.0	2	6	1	0.00
2005 - 09	25.5	2	2	3	0.30
2005 - 10	25.0	4	2	2	0.00
2005 - 11	24.5	3	2	4	0.17
2005 - 12	25.0	3	1	4	0.85
2005 - 13	25.0	4	1	4	0.98
2005 - 14	25.5	4	8	4	3.43
2005 - 15	25.5	4	8	4	3.99
2005 - 16	25.5	4	2	1	0.42
2005 - 17	25.5	1	8	3	1.38
2005 - 18	25.0	1	8	2	0.18
2005 - 19	25.0	1	8	2	0.18
2005 - 20	25.0	1	8	3	0.30
2005 - 21	26.0	2	8	4	3.50
2005 - 22	26.0	2	8	3	2.50
2005 - 23	26.0	2	7	3	0.59
2005 - 24	26.5	2	7	4	0.85
2005 - 25	26.5	3	8	4	2.86
2005 - 26	27.0	4	7	4	4.51
2005 - 27	28.0	3	8	4	4.55
2005 - 28	28.0	3	8	3	2.67
2005 - 29	27.5	4	7	3	3.83
2005 - 30	28.0	4	8	2	2.85

6.3.2　相关性分析

如表 6-2，分别把实测赤潮生物细胞浓度、水温、潮汐类型、风向、天气状况记为 Y、X_1、X_2、X_3、X_4。根据相关系数的概念，$X_i(i=1,2,3,4)$ 和 Y 的相关系数的大小(相关性的大小)反映

了 Y 的变化受 X_i 的影响程度的大小。如果某因子和 Y 的相关系数比较大，就说明该因子对赤潮的发生起到很大的促进作用。对于上述四因子作相关性分析，具体分析结果如表 6-3 所示。

表 6-3 各因子和 Y 的相关系数

因子	水温(X_1)(℃)	潮汐类型(X_2)	风向(X_3)	天气状况(X_4)
相关系数	0.730 1	0.573 3	0.412 3	0.372 4

由表 6-3 可知，水温是大亚湾澳头水域赤潮发生的最主要影响因子。当然影响赤潮发生的因素可能有很多，而不只是上述 4 种因素，那样就可以通过相关性分析，从很多的影响因子中选择出主要的影响因子，这不影响预报的准确性。在下面的分析中，将残差平方和的大小作为模型好坏的评价标准。

6.3.3 单因子非线性回归

本节先建立单个因子 $X_i(i=1,2,3,4)$ 和 Y 的非线性回归模型 $f_i(X_i)$，而不是建立 4 因子与 Y 的总体的线性回归模型。这样可以消除各因子之间的影响，减小总体模型的残差平方和。

首先考虑因子 X_1，在散点图 6-4 中，可以看出 Y 随 X_1 变化的非线性趋势（S 形生长模型趋势）。

构造非线性回归模型，即构造 Gompertz 模型（洪再吉，1986）为

$$Y_1 = a\exp\{-\exp\{b - cX_1\}\} \tag{6-55}$$

其中参数 a、b、c 未知。

作上述非线性回归，结果如表 6-4 所示。

表 6-4 非线性回归参数 a、b、c

参数	a	b	c
回归结果	3.432 0	43.636 7	1.717 7

由此得出 X_1 和 Y 的非线性回归模型为

$$Y_1 = f_1(X_1) = 3.432\,0\exp\{-\exp\{43.636\,7 - 1.717\,7X_1\}\} \tag{6-56}$$

由 Y_1 随 X_1 的变化趋势（图 6-4），可以看出 Y_1 与 Y 拟合得相当好。类似地，对 Y 关于 X_2、X_3、X_4 分别作非线性回归分析，结果如下：

$$Y_2 = f_2(X_2) = 0.772\,3X_2 - 0.442\,4 \tag{6-57}$$

$$Y_3 = f_3(X_3) = -0.018\,8X_3^3 + 0.376\,7X_3^2 - 1.864\,2X_3 + 2.498\,3 \tag{6-58}$$

$$Y_4 = f_4(X_4) = 1.380\,7(\exp\{0.224\,0X_4\} - 1) \tag{6-59}$$

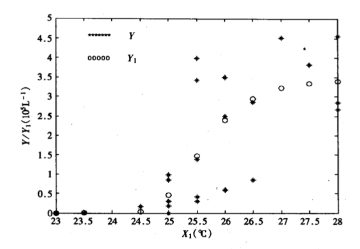


图 6-4　赤潮生物细胞浓度 Y 随水温 X_1 变化的趋势

6.3.4　构造混合回归模型

由上述非线性回归模型，不难计算出 $Y_i(i=1,2,3,4)$（Y_i 可以看成因子 X_i 对赤潮生物细胞浓度 Y 的贡献），然后对 Y 和 Y_1、Y_2、Y_3、Y_4 作多元线性回归（茆诗松，1981）。令

$$Y = f(X) = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3 + a_4 Y_4 + a_0 \tag{6-60}$$

式中 a_1、a_2、a_3、a_4 是未知的回归系数，a_0 为常数项。把 Y 和 $Y_i(i=1,2,3,4)$ 的值代入回归方程，得出未知参数 $(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)=(-2.515\,6,0.526\,6,0.850\,0,0.849\,9,0.481\,2)$。

结合 6.3.3 节的内容，构造出一个用于作赤潮预报的回归模型为

$$\begin{aligned} Y &= f(X) \\ &= 0.526\,6Y_1 + 0.850\,0Y_2 + 0.849\,9Y_3 + 0.481\,2Y_4 - 2.515\,6 \\ &= 1.807\,3\exp\{-\exp\{43.636\,7 - 1.717\,7X_1\}\} + 0.656\,6X_2 - 0.016\,0X_3^3 + \\ &\quad 0.320\,2X_3^2 - 1.584\,4X_3 + 0.664\,4\exp\{0.224\,0X_4\} - 1.432\,7 \end{aligned} \tag{6-61}$$

式(6-61)称为混合回归模型，显然，它是一个多元非线性模型。由此可以得出赤潮生物细胞浓度的计算值，记为 Y_0，如表 6-5 所示。

表 6-5　赤潮生物细胞浓度的计算值

日期	Y	Y_0	日期	Y	Y_0
2005－03	0.01	－1.095 9	2005－09	0.30	－0.060 9
2005－04	0.00	0.159 0	2005－10	0.07	0.461 2
2005－05	0.00	－0.032 1	2005－11	0.17	0.164 3
2005－06	0.00	0.729 7	2005－12	0.85	1.128 2
2005－07	0.00	0.212 0	2005－13	0.98	1.784 6
2005－08	0.00	－0.476 4	2005－14	3.43	3.228 9

续表

日期	Y	Y_0	日期	Y	Y_0
2005 - 15	3.99	3.228 9	2005 - 23	0.59	1.559 5
2005 - 16	0.42	0.782 3	2005 - 24	0.85	2.176 5
2005 - 17	1.38	0.932 9	2005 - 25	2.86	3.350 7
2005 - 18	0.18	0.142 0	2005 - 26	4.51	3.631 8
2005 - 19	0.18	0.142 0	2005 - 27	4.55	3.585 1
2005 - 20	0.30	0.403 1	2005 - 28	2.67	3.258 5
2005 - 21	3.50	2.403 9	2005 - 29	3.83	3.369 3
2005 - 22	2.50	2.077 2	2005 - 30	2.85	3.653 9

为了说明拟合的效果,计算 Y 和 Y_0 的相关系数 $r = 0.916\ 5$,这说明由混合回归模型得出的赤潮生物细胞浓度的计算值和实测值是高度相关的。

下面用残差平方和的大小来判断这里构造的混合回归模型和多元线性回归模型的好坏。记 $Y = (Y(1), Y(2), \cdots, Y(28))$, $Y_0 = (Y_0(1), \cdots, Y_0(28))$,残差平方和定义如下:

$$E = \sum_{i=1}^{28} (Y(i) - Y_0(i))^2 \tag{6-62}$$

将式(6-61)中的值代入上式得出混合回归模型的残差平方和 $E_1 = 11.313\ 4$,而由林祖享(2002)得出的多元线性回归模型的残差平方和 $E_2 = 12.627\ 8$。显然 $E_1 < E_2$,也就是说在进行赤潮预报的时候,这里的混合回归模型是一个更好的模型。为了更加直观,作出 Y 及 Y_0 的散点图,如图 6-5 所示。从图 6-5 可以看出赤潮生物细胞浓度的计算值与实测值有很好的拟合趋势,说明此混合回归模型能很真实地反映出上述影响因子与赤潮形成的密切关系。

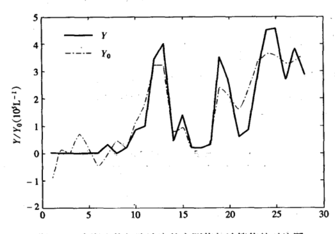


图 6-5 赤潮生物细胞浓度的实测值与计算值的对比图

6.4 渤海湾生态环境状况调查与评价

浮游植物生物量与生产力是海洋生态系统食物网的结构与功能的基础环节，是供养其摄食者——浮游动物的物质基础，从而直接或间接地影响海区鱼、虾、贝等经济渔业资源的变动。浮游植物与周围物理、生物、化学环境通过各种复杂的相互作用形成一个统一的整体，一个相互影响、共生共灭的生态环境系统。

渤海是一个半封闭的浅海，生态环境的季节变化显著，同时渤海周围又是一个人口相对集中、工农业生产较为发达的地区，易受人为因素的影响。特别是近些年来，渤海富营养化状况日益严重，赤潮频繁发生，给工农业生产以及社会的可持续发展都带来很大的负面作用。因此，开展渤海浮游植物及其相关环境因子和海域的富营养化调查研究和评价有很大的现实意义和经济价值。

2000—2003年，分别于枯水期(5月)、丰水期(8月)、平水期(10月)对天津近海海域生态环境因子进行了调查，调查区域为：北纬38°36′30″~39°06′57″、东经117°39′~118°。

监测项目为：

①水文气象，包括风向、风速、简易天气现象、水温、水色、水深、透明度、海况；

②水质，包括pH值、盐度、溶解氧、叶绿素、化学耗氧量、磷酸盐、亚硝酸盐、硝酸盐、铵盐。

2003年5—9月，对渤海湾赤潮监控区进行了高频率(每周一次)监测，采样站点如图6-6所示。监测区域为：北纬38°49′20″~38°54′、东经117°37′~117°50′。

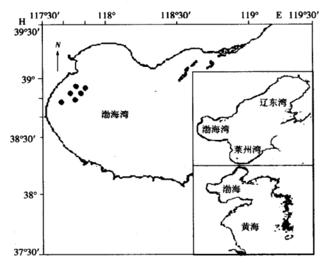


图6-6 采样站位图

监测项目为：

①水文气象，包括风向、风速、简易天气现象、水温、水色、水深、透明度、海况；

②理化要素，包括pH值、盐度、溶解氧、叶绿素、化学耗氧量、磷酸盐、亚硝酸盐、硝酸盐、铵盐。

③赤潮生物，包括浮游植物细胞浓度（个/mL）、优势种及其细胞浓度（个/mL）。

气象、水文、水质、生物量监测项目及分析方法见表 6-6。

表 6-6 监测项目与分析方法一览表

指标	监测项目	分析方法	采用标准
水文气象	气压	空盒气压表	GB 12763.2 - 91
	风速	风向、风速仪（表）	GB 12763.2 - 91
	风向	风向、风速仪（表）	GB 12763.2 - 91
	气温	通风干湿表、温度计	GB 12763.2 - 91
	透明度	透明度盘（水下照度计）	GB 17378.4 - 1998
	水色	水色计	GB 17378.4 - 1998
	海况	海浪及海流目测	GB 17378.4 - 1998
	水温	颠倒温度计	GB 17378.4 - 1998
环境因子	pH 值	笔式 pH 计、pH 电位计	GB 17378.4 - 1998
	盐度	电导法、折射式盐度计	GB 17378.4 - 1998
	溶解氧	测氧计、碘量法	GB 17378.4 - 1998
	化学耗氧量	碱式高锰酸钾法	GB 17378.4 - 1998
	活性磷酸盐	磷钼酸法	GB 17378.4 - 1998
	亚硝酸盐	重氮—偶氮分光光度法	GB 17378.4 - 1998
	硝酸盐	锌镉还原法	GB 17378.4 - 1998
	铵盐	次溴酸盐氧化法	GB 17378.4 - 1998
生物因子	浮游植物种类及数量	个体计数法	GB 17378.7 - 1998
	浮游动物种类及数量	个体计数法	GB 17378.7 - 1998
	底栖生物种类及数量	个体计数法	GB 17378.7 - 1998
	叶绿素	荧光分光光度法	GB 17378.7 - 1998

6.4.1 渤海湾海水理化因子时空分布及变化

1. 海水温度

海水温度是海洋环境中最为重要的生态因子。水温对浮游生物的生活起着重要的作用。在适当的温度范围内，温度的升高将加速生物的新陈代谢与繁殖。

渤海湾是一个半封闭的海湾，三面环陆，气温的日差和季节差较为明显，再加上渤海湾与外界的水体交换能力较差，水深较浅，所以水温受气温的影响较大，有较明显的大陆性和季节性。根据调查资料分析，海水水温与气温有较明显的相关关系。

图 6-7 为 2003 年 5—9 月渤海海域水温季节变化趋势图。

调查海区水温的平面变化不大，丰水期和枯水期温度变化趋势为近岸高、远岸低。这是由于该季节太阳辐射较强，近岸海水受到陆地辐射的影响，增温较远岸快。平水期与丰水期和枯水期的变化相反，其分布由近岸向远岸呈逐渐增加的趋势。这是由于太阳辐射减弱，受陆地降

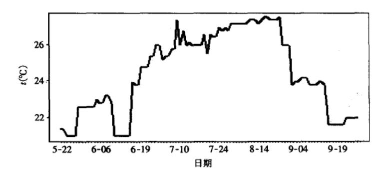


图 6-7　2003 年 5—9 月渤海海域水温季节变化趋势图

温迅速的影响，近岸海水降温较外海快。

2.盐度

盐度是海洋生态中另外一个非常重要的环境因子。许多报道认为，降雨是引起海水盐度下降，从而引起浮游植物异常繁殖的物理刺激因素。

图 6-8 为 2003 年 5—9 月渤海海域盐度季节变化趋势图。

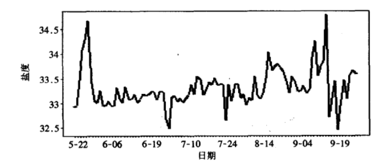


图 6-8　2003 年 5—9 月渤海海域盐度季节变化趋势图

枯水期和平水期的盐度空间变化较小，而丰水期的盐度变化较大。盐度最低点都出现在大的排污河附近或者渤海湾的南部区域，这是由于夏季入海径流增加和夏季渤海湾流为逆时针旋转，使含盐量较低的陆地径流由北向南沿岸流动引起的。

3.营养盐

营养盐是浮游生物赖以生存的物质基础。多数学者认为，氮、磷、硅等无机营养盐浓度的上升是促使浮游植物生长繁殖的暴发，从而引起赤潮的原因。朱树屏的实验结果表明，海洋浮游植物对无机氮和无机磷的需要的适应浓度分别为 80 mg/L 和 18 mg/L 以上，而邹景忠则认为 15 mg/L 的无机磷浓度是浮游植物生长繁殖的起码浓度。海水中无机氮源的主要形式为硝酸盐、亚硝酸盐、铵盐三种。

图 6-9 为 2003 年 5—9 月渤海海域硝酸盐、亚硝酸盐、铵盐季节变化趋势图。

活性磷酸盐是浮游植物生长繁殖的重要元素，许多研究表明，它是引发赤潮的重要因素。海水中的磷以颗粒态和溶解态存在。前者主要为含有有机磷和无机磷的生物碎屑以及某些磷酸盐矿物颗粒；后者则包含有机磷和无机磷的两种溶解态。溶解态的无机磷是正磷酸盐，主要

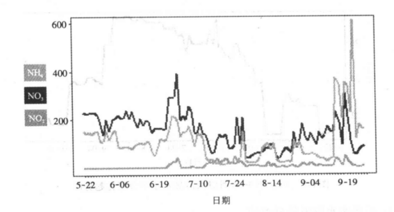


图 6-9 2003 年 5—9 月渤海海域硝酸盐、亚硝酸盐、铵盐季节变化趋势图

以 HPO_4^{2-} 和 PO_4^{3-} 的离子形态存在。在河口以及沿岸浅海区磷酸盐的垂直方向分布比较均匀,而在深海和大洋中则有明显得分层。

图 6-10 为 2003 年 5—9 月渤海海域磷酸盐季节变化趋势图。

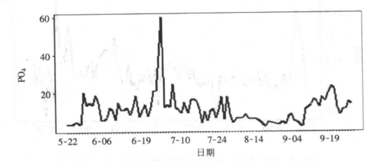


图 6-10 2003 年 5—9 月渤海海域磷酸盐季节变化趋势图

4.其他环境因素

化学耗氧量(COD)是赤潮发生期间海洋生态环境变化的又一参数。由于浮游生物大量繁殖并进行光合作用而产生大量氧气,以及死亡藻类的分解消耗大量氧气,所以赤潮发生时,海水中的含氧量变化较大。

图 6-11 为 2003 年 5—9 月渤海海域化学耗氧量季节变化趋势图。

海水的 pH 值也是重要的环境因子,在赤潮发生海域的 pH 值比正常海域的 pH 值高。这可能是由于在赤潮代谢过程中所产生的代谢物溶解在海水中的缘故。

图 6-12 为 2003 年 5—9 月渤海海域 pH 值季节变化趋势图。

另外还有其他环境因子,例如气象、水文、潮汐和降雨等,都是影响赤潮发生的重要因素。

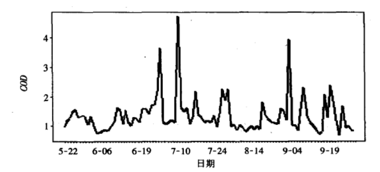


图 6-11　2003 年 5—9 月渤海海域化学耗氧量季节变化趋势图

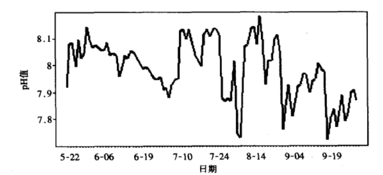


图 6-12　2003 年 5—9 月渤海海域 pH 值季节变化趋势图

6.4.2　渤海湾赤潮藻类时空分布及变化

渤海海域的浮游植物的季节变化较为明显，季节的不同，各个海域的优势种类明显不同。在 5 月份的枯水期，由于温度的增加，广布性种类增加，浮游植物的种类主要为沿岸的常见种类，如适温和适盐范围广的布氏双尾藻和尖隐藻为主。在丰水期的 8 月份，由于雨季径流增加的影响，盐度较低、营养盐浓度较大，且温度较高，优势种为近岸广布种和低盐暖温性的种类，如布氏双尾藻、太阳双尾藻、角刺藻等。在平水期的 10 月份，水温下降，盐度较高，出现了许多广温、广盐性种类，另一方面，温度抑制了藻种的大量繁殖，该季节出现的种类较多，而且个体分布也较为均匀，没有明显的优势种。

渤海的不同的地理位置，水质状况也大不相同，浮游植物的种类也明显不同。5 月份的北部海域优势种为斯氏根管藻，南部海域为个体微小的尖隐藻。丰水期优势藻种为硅藻门的直链藻，且各海域的甲藻种类增多。研究表明，甲藻适应的温度较高，渤海湾的浮游植物种类变化也正说明了这种情况。国家海洋局北海分局塘沽海洋监测中心的观测结果表明：5 月份出现硅藻门 7 种，其中诱发赤潮的藻类有 2 种，占 28.6%；8 月份检测出 4 门 12 个种属，其中可以诱发赤潮的种类有 6 种，占 50%，这可能由于丰水期盐度较低，温度较高引起的；在 10 月份则没有明显的优势种属。

6.4.3　渤海湾生态环境评价与分析

1. 富营养化的评价指标、标准及模式

水体富营养化为水生植物(主要是浮游植物)的生长和繁殖提供了大量的营养物质,并往往导致赤潮的发生,直接引起水质恶化,提高水处理的难度和费用(如工业用水的设备费和运转费),也会破坏疗养胜地和旅游胜地的水环境。作为农业用水,若富营养化程度很高,对农作物也有影响。以水稻为例,富营养化会阻碍根系的生长,产生倒伏、贪青、生长过分茂盛等。对于富营养化的特征与水域营养状态,不同的研究者有不同的表示方法,表 6-7 是日本学者提出的一种海区营养等级的划分方法。

表 6-7　海域营养阶段的区分及其特征

特　征	腐　水　域	过营养水域	富营养水域	贫营养水域
水质、生产量				
透明度(m)	3 以下	3 以下	3~10	10 以上
水色	带黑色	黄、黄绿、赤褐等	短期内看到有颜色	看不到颜色
COD(O_2 mg/dm^3)	10 以上	3~10	1~3	1 以下
BOD(O_2 mg/dm^3)	10 以上	3~10	1~3	1 以下
无机氮化合物(N μg/dm^3)	100 以上	10~100	2~10	2 以下
溶解氧 DO	表层低氧或无氧(0%~30%)	表层过饱和,中层为饱和,底层无氧 30%~50%	表层、中层为过饱和,底层为不饱和(50%~80%)	表、中层为过饱和状态(80%~100%)
硫化氢	接近表层处有	在底层有	无	无
浮游植物的最大成层情况	—	3 m 以上,有时 0.5 m 以上,也有在中层或低氧区成层	形成数米至十多米层	形成数十米层
叶绿素(mg/m^3)	—	10~200	1~10	<1
基础生产量[mg/(m^3·h)]	—	10~200	1~10	>1
叶绿素(mg/m^2)	—	0.1~1	0.05~0.1	<0.05
基础生产量[mg/(m^2·h)]	—	1~10	0.3~1.0	<0.3
底质				
泥色	黑色、表层没有褐色的氧化层	黑色、无氧,稍带有黑色氧化层	有时带有黑色,有氧化层	无黑色、有氧化层
硫化物(mg/g)	>1.0	0.3~3.0	0.03~0.3	<0.03
COD(mg/g)	—	>30	5~30	<5
微生物细菌细胞数(个/cm^3)	$>10^5$	10^3~10^5	10^2~10^4	$<10^2$
浮游植物细胞数(个/cm^3)	<103,种数多	103~105,种少数稍多	10~103,种多数少	<10,种多数少
原生动物	数多	数稍多	数少	数少

续表

特　　征	腐　水　域	过营养水域	富营养水域	贫营养水域
浮游动物(甲壳类)	—	数少,种少(也有种多的时候)	数多,种多	数少,种多
底栖生物				
多毛类	数少,种少	数少,种少　数特多种多	数多,种多	数少,种少
甲壳类	—	数少,种少	数多,种多	数少,种少
例子	河口,污水排放水域	内湾、半咸水湖、湾口非常狭窄的内湾	内湾,水深 30 m 以上的沿岸海域、近海海域的涨潮域	水深 30 m 以上的沿岸海域、近海海域

表 6-8　富营养化的指标

	区　　分	指　　标
显在的评价指标	藻类现存量的测定 由于藻类增殖而使水质变化的量的测定	COD、TOC、TOD、N、P、叶绿素、SS、微生物种等、pH 值、碱度、CO、DO、透明度、色度等
潜在的评价指标	藻类所必需的物质量的测定 藻类所必需的物理量的测定 包括潜在能力的测定	P、N、TOC、T－C 微量金属等、气温、水温、照度、辐射量、停留时间、AGP、DI 等

我国在“八五”期间的国家科技攻关项目中开展了近海富营养化的研究,对纳污海湾、虾池两种不同的生态类型水体的检测资料和富营养化的主要特征进行了比较,提出了以化学耗氧量(COD)、总氮(TN)、总磷(TD)、铵盐(NH_4)、硝酸盐(NO_3)、磷酸盐(PO_4)、叶绿素、初级生产力、生物多样性等作为营养类型的评价体系。

国内外较为通用的营养化的评价方法有以下几种。

(1)单项指标法

单项指标法是采用富营养化阈值进行评价的一种方法,是上田和一夫(1973)提出的。具体的指标是:$COD = 1 \sim 3$ mg/dm^3、$DIP = 0.045$ mg/dm^3、$DIN = 0.2 \sim 0.3$ mg/dm^3、$Chla = 1 \sim 10$ mg/dm^3、初级生产力 = 1 ~ 10 mg/(dm^3·h)、多样性指数低等。由于海区的不同,这些阈值亦有所不同。

(2)综合指数法

综合指数法又称作营养状态指数法,综合指数表达式如下:

$$E = \frac{COD \times DIN \times DIP}{4\ 500} \times 10^6$$

当营养指数 E 大于 1 时,则表示水体富营养化。

(3)营养状态质量法(NQI 法)

营养状态质量指数用下式表示:

$$NQI = \frac{C_{COD}}{C'_{COD}} + \frac{C_{TN}}{C'_{TN}} + \frac{C_{TP}}{C'_{TP}}$$

式中,C_{COD}、C_{TN}、C_{TP}分别为化学耗氧量、总氮、总磷的实测浓度值;C'_{COD}、C'_{TN}、C'_{TP}则分别为评价

标准采用的浓度值。当指数 *NQI* 大于或等于 3 时，即为富营养化水平。彭云辉(1991)率先将模糊理论引入近海富营养化水平的评价，将 *NQI* 法应用于珠江口水域，取得了与实测值较为一致的结果。

2.赤潮藻类生态环境状况评价与分析

根据调查和监测项目，考察渤海生态环境因子的分布和变化，主要包括硝酸盐、亚硝酸盐、铵盐、磷酸盐、叶绿素、初级生产力以及浮游植物的个体总量和浮游动物的生物量。

从评价结果来看，1993—2003 年间的无机氮水平较 1960 年和 1982 年呈大幅度上升趋势，均超过了浮游植物对无机氮的需求浓度，尤其是从 1995 年开始，渤海无机氮的平均浓度超过了 0.2～0.3 mg/L 的富营养化的浓度水平。

磷酸盐自 1993 年以来，除 1994 年外，全海域平均浓度均超过 16 μg/L 的浮游植物的适应浓度，较 1960 年和 1982 年的浓度上升了 2 倍多。从空间分布来看，1993—1994 年除辽东湾湾顶外，其余区域海水均为一类水质标准，为富营养型。1995—1996 年在辽东湾、秦皇岛近海岸、渤海湾、莱州湾均出现了磷酸盐的超标区，与无机氮的情况刚好相反，1997 年磷酸盐的超标范围呈扩大趋势。

COD 的年变化较为明显，从 1993 年到 2003 年呈上升的趋势。渤海全海域的平均值较低，各年平均不超过现有的一类水质标准，但超过了富营养化指标的下限，即大于 1 mg/L。一般学者认为，海洋浮游生物体中和大洋中的 N 与 P 的浓度之比一般恒定在 16:1，此比值称作 Redfield 值。偏离 Redfield 值过高或者过低都可能引起浮游植物生长受到相对较低含量的营养盐的限制。如厦门港赤潮发生区每月大潮表层海水的 N 与 P 的浓度比值的年平均值为 60.87，赤潮发生期的 N 与 P 的浓度比值的均值为 56.67。从浮游植物供求关系看，N 过剩，而 P 显得紧缺，P 成为该海区的限制性因子。对渤海历年来的监测数据分析表明，N 与 P 的浓度比值的差异较大，最小值为 3.5，最大值为 1 725。根据 2003 年的监测数据计算表明：渤海湾的 N 与 P 的浓度比均值为 22.5，略高于 Redfield 值，说明渤海湾调查海域营养限制因素为磷。铵盐和硝酸盐的季节变化与藻类丰度的季节变化比较吻合，说明了铵盐和硝酸盐是影响渤海湾藻类丰度变化的主导因子。

6.5 渤海湾赤潮的综合预测

日本学者吉田阳一首先将多元统计学方法应用到赤潮研究中，对现场海域赤潮生消过程中获得的生物、物理、化学、水文、气象等大量监测数据进行统计学处理，从中提取出影响或诱发特定赤潮的某个或某几个关键因子。目前应用的主要方法包括主成分分析、聚类分析、多元回归分析等。由于藻类浓度是赤潮发生的标志，因而以实测的藻类浓度为因变量，其他的测量数据为自变量，通过回归技术，给出它们的定量关系，从而确定影响藻类浓度的关键因子以及临界值。

6.5.1 监测数据及预处理

2000—2003 年，分别于枯水期(5 月)、丰水期(8 月)、平水期(10 月)对天津近海海域生态环境因子进行了调查。

以 2003 年 5—9 月的实测数据作为样本，预报因子为光照、风速、气压、表层水温、pH 值、

盐度、化学耗氧量、DO、磷酸盐、硅酸盐、硝酸盐、叶绿素、亚硝酸盐、铵盐共 14 组环境因子数据，浮游植物总量作为预报量。其中预报因子只有光照(sr)为名义水平变量，存在三个水平：晴天，阴天，雨天。其他的 13 个自变量都为数值变量，浮游植物总量也是数值变量，所以应采用回归算法。如果假定它们之间的联系不随时间和空间而改变，就将全部 93 组数据当作预报因子和预报量的样本。

数据的预处理包括两个方面，一是名义水平变量的处理，二是数据的标准化。有关回归树的一些算法可以直接处理名义水平变量，而且数据的单调变化不会影响最终的结果，但是为了比较其他的算法，还是需要进行预处理。名义水平变量的处理比较规范，有多少个水平就拆成多少个 0－1 变量。由于仅有一个 3 水平的名义变量，将它拆成 3 个 0－1 变量即可。数据有的比较整齐，波动以及方差不是很大；有的波动以及方差都很大，如浮游植物总量，对应的盒子图以及直方图如图 6-13。从图 6-13 来看，浮游植物总量的“异常值”相当多，变化范围从 10 到 8 952，而且样本量不是很充分，这给预测带来很大的困难。减去均值，除以标准差这种标准化方法不大适合异常值较多的数据，所以采用$(x - x_{min})/(x_{max} - x_{min})$标准化方法，消除不同量纲的影响，将所有数据映射到[0,1]区间。

在数据预处理之后，为了便于比较各种回归算法对赤潮数据的适应性，特意预留了 5 月 22 日 5 号监测站，6 月 12 日 2 号监测站和 8 月 7 日 4 号监测站 3 组数据，其余 90 组数据用来得到回归方程。最后以相对误差$(y_{predict} - y_{true})/y_{true}$作为衡量的指标，当然，由于检验样本很少，所以对最后的结论应持有一定的谨慎态度，还需要其他数据或者实验的验证。

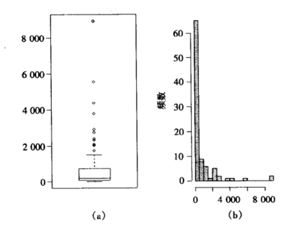


图 6-13　浮游植物总量盒子图和直方图
(a)盒子图；(b)直方图

6.5.2　秩相关系数分析

关于赤潮藻类浓度与环境因子相关性，已有相关论述，但往往凭经验作出定性的判断，缺乏定量描述，或者只是考虑简单的线性关系，忽略其他的相关性。实际上，藻类浓度与任一种环境因子的关系可能是线性的，也可能是单调相关，甚至是很复杂的函数关系。本节以线性相关系数描述线性相关性，秩相关系数(Myles Hollander，1973)反映单调相关性，Hoeffding 独立性

检验(Myles Hollander,1973)统计量表达了更复杂的相关性。

通常所说的相关系数是指线性相关系数,它只是用来描述两个因素之间的线性相关程度。为了反映其他的相关性,考虑两个秩相关系数 Kendall τ 和 Spearman ρ,它们主要反映单调相关程度。通常如果这些相关系数接近0,就认为对应的两个因子是独立的,但是接近到何种程度才算独立(比如线性相关系数(或者秩相关系数)为0.07),该如何判断这两个因素是相关还是不相关,这就需要以这些相关系数作为统计量进行独立性检验。原假设就是对应的两个因素是独立的,对立假设对应的两个因素存在相关性。在显著性水平为0.05的情况下,如果得出的 P 值小于0.05,就拒绝原假设,认为这两个因素是相关的。在众多独立性检验中,Hoeffding 独立性检验对于各种非单调的相关关系都是稳定的,从而获得广泛的应用。将测得的14种环境因子分别与藻类总浓度作上述4种独立性检验,得到各种相关系数及 P 值,见表6-9。

表6-9 各环境因子与藻类总浓度的各种相关系数及独立性检验的 P 值

藻类浓度	线性相关系数	P 值	Kendall 秩相关系数	P 值	Spearman 秩相关系数	P 值	Hoeffding 统计量	P 值
风速	0.053	0.602	0.182	0.008	0.254	0.011	0.02	0.007
气压	0.193	0.055	0.336	0	0.47	0	0.076	0
表层水温	-0.258	0.01	-0.171	0.012	-0.238	0.018	0.029	0.002
pH 值	-0.42	0	-0.27	0	-0.385	0	0.039	0
盐度	0.152	0.134	0.186	0.007	0.268	0.008	0.028	0.002
化学耗氧量	-0.073	0.472	-0.048	0.48	-0.056	0.582	-0.003	0.524
DO	0.189	0.06	0.148	0.03	0.222	0.027	0.016	0.014
磷酸盐	-0.001	0.996	0.039	0.575	0.071	0.494	0.002	0.255
硅酸盐	-0.201	0.046	-0.167	0.014	-0.263	0.009	0.02	0.006
硝酸盐	-0.259	0.01	-0.139	0.042	-0.207	0.04	0.012	0.027
叶绿素	-0.102	0.314	-0.074	0.277	-0.116	0.252	0.006	0.099
亚硝酸盐	0.009	0.93	0.022	0.75	0.038	0.709	0.005	0.113
铵盐	0.425	0	0.001	0.983	-0.004	0.967	0.003	0.193

1.非线性相关因子

从表6-9可以看出,两个秩相关系数和 Hoeffding 检验的结果是一致的。两个秩相关系数检验和 Hoeffding 检验都说明因子风速、气压、盐度、DO 与藻类浓度存在相关性,而线性相关系数检验则认为这4个因子与藻类浓度是独立的,这也说明藻类浓度与这4个因子之间存在某种单调相关关系,而非通常假定的线性关系,而且这4个因子的秩相关系数和 Hoeffding 统计量都大于0,也说明它们与藻类浓度是正相关。为了更加准确地说明是正相关还是负相关,还可以以相关系数作为检验统计量,原假设是两个因子独立,对立假设是两个因子存在正(负)相关性。但是 Hoeffding 检验却不能检验正(负)相关性,只能检验是否相关,其他的三个检验都可以,所得结果与上面所说的一致,这里不再列出。系数的绝对值越接近1,对应的因子的相关性就越大,所以这四个因子中与藻类浓度正单调相关最大的是气压,盐度和风速与藻类浓度的正单调相关性差不多,DO 与藻类浓度的正单调相关性与上面三种环境因子相比就略逊一筹。

2.线性相关因子

环境因子表层水温、pH 值、硅酸盐、硝酸盐由于与藻类浓度的线性相关系数都较大，相应的独立性检验的 P 值都小于 0.05，所以可以认为它们与藻类浓度存在某种线性相关性。而且秩相关系数和 Hoeffding 统计量对应的独立性检验的 P 值都小于 0.05，因而有更充分的理由相信这 4 个因子与藻类浓度存在某种相关性，且这种相关性可以认为是一种线性相关。另外也可以单纯从线性相关系数的大小和正负来判定该因子与藻类浓度的线性相关性的强弱和正负。由于这 4 个环境因子对应的线性相关系数以及秩相关系数都为负值，所以表明这 4 个因子与藻类浓度都是负线性相关，且线性相关强弱依次为 pH 值 > 硝酸盐 > 表层水温 > 硅酸盐，但是硝酸盐和表层水温与藻类浓度的线性相关性几乎相同。

3.独立因子

在表 6-9 中比较特殊的是因子铵盐，它的线性相关系数为 0.425，对应的独立性检验的 P 值几乎为 0，所以该因子与藻类浓度存在很强的线性相关性。理论上认为其他的三种独立性检验的 P 值也应该接近 0，因为线性关系一定是单调的。但实际结果却恰恰相反，秩相关系数和 Hoeffding 统计量都很小，对应检验的 P 值都大于 0.05。画出标准化(减去均值除以标准差)后的藻类浓度数据和对应的铵盐数据的散点图，见图 6-14。

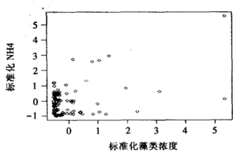


图 6-14　标准化藻类浓度和标准化 NH_4 散点图

从图 6-14 可以看出藻类浓度和因子铵盐之间呈现出两条直线趋势，一条接近水平，一条接近垂直，但一般认为这样是没有什么函数关系的，所以秩相关和 Hoeffding 都未能检验出来。由于有线性趋势，所以线性相关系数还是很大的，这也反映了线性相关系数的局限性。通常更愿意接受其他独立性检验的结果，认为藻类浓度与环境因子铵盐之间没有什么相关性。其他剩余的环境因子，如化学耗氧量、磷酸盐、叶绿素、亚硝酸盐都可以认为对藻类浓度影响不是很大，以后建立模型时就可以不必考虑这些因素，这大大降低了维数，节约了成本。

从渤海湾赤潮监控区的监测及分析可以得出以下结论。

①渤海湾地区影响赤潮藻类浓度的环境因子为气压，盐度，风速和 DO，其每一因子对藻类浓度的影响都可以看作是正的单调关系，且影响的大小依次为气压，盐度，风速和 DO。

②环境因子表层水温，pH 值，硅酸盐、硝酸盐与藻类浓度都呈现出负的线性相关性，且线性相关强弱依次为 pH 值、硝酸盐、表层水温、硅酸盐，但是硝酸盐和表层水温对藻类浓度的线性影响几乎相同。

③其他测量的理化因子，如耗氧量、磷酸盐、叶绿素、亚硝酸盐、铵盐都可以认为对藻类浓度几乎没有影响。

6.5.3　随机梯度 Boosting 分析

1.参数选择及相对影响计算

运算过程中主要是一些参数的选择，有些可以按照建议取值，如学习速度小于 0.1 就行，这里取 0.001。Bagging 的比例取 0.5，每棵树的叶结点数是由树的深度控制的，这里令其为 3，

即每棵树最多有三个变量的交互作用。比较难确定的参数是树的数目，由于梯度 Boosting 可以在原来生成树的基础上任意增加树的数目，所以首先生成足够多的树，然后从中选择最优的，得到的平方损失如图 6-15 所示。

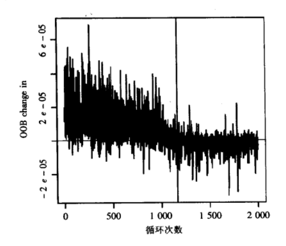


图 6-15　选择最优的树的数目

图 6-15 中竖线表示最优的树的数目 $M = 1\ 165$，选用的损失函数是绝对损失函数。为了对生成的回归树产生直观的认识，给出所有的树是不现实的，观察最后一棵树，即第 1 165 棵树，如图 6-16 所示。

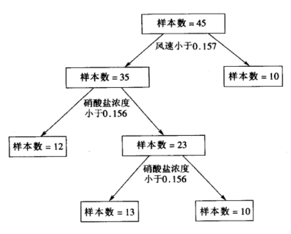


图 6-16　最后一颗回归树

预留的三组数据的相对误差为 −0.428、−0.172、0.204，这在一个可以接受的水平之内。但是由于所得模型的形式非常复杂，很难有实际的解释。实际上人们最关心的问题在这么多的变量中究竟哪个变量与浮游植物总量关系更密切，哪个变量对浮游植物的生长起着关键的作用，即它们对浮游植物总量影响的强弱。问题就转化成这样的形式：给定一个多元函数 $F(\boldsymbol{x}) = F(x_1, \cdots, x_n)$，怎样度量单自变量 x_j 对整个函数 $F(x_1, \cdots, x_n)$ 的相对影响？一个可行

的度量是

$$I_j = \left(E_x \left[\frac{\partial F(x)}{\partial x_j} \right]^2 \cdot \mathrm{var}_x [x_j] \right)^{1/2} \tag{6-63}$$

但是对于回归树来说，由于不连续，不存在一阶偏导，式(6-63)根本不存在。这里给出回归树的一个估计

$$\hat{I}_j^2 = \sum t = I^{J-1} \hat{i}_t^2 I \quad (\nu_t = j) \tag{6-64}$$

其中：t 表示第 J 个叶结点的回归树的第 t 个非叶结点，叶结点总比所有非叶结点多一个；ν_t 是在非叶结点的分割变量；$\hat{i}_t^2$ 就是分割造成的经验损失的减少。式(6-64)直接作为回归树的不同变量对目标函数影响的度量。对于树的线性组合，自然的推广就是

$$\hat{I}_j^2 = \sum_{m=1}^{M} \hat{I}_j^2 (T_m) \tag{6-65}$$

一般树的数目非常多，每个变量被选作分割变量的概率是同等的。如果一个变量多次被选作分割变量，应该是该变量确实对目标函数的贡献大。16个环境因子(加上拆分的两个名义水平变量)对浮游植物总量的影响大小的次序见图6-17，相对影响的具体数值大小如表6-10所示。

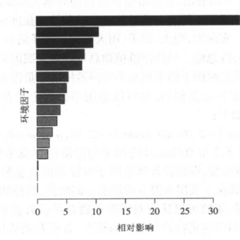


图6-17　环境因子对浮游植物总量的影响大小排序

表6-10　环境因子对浮游植物总量的相对影响大小

序号	环境因子	相对影响
1	气压	34.76
2	磷酸盐	10.61
3	pH值	9.65
4	溶解氧	8.14
5	表层水温	7.72
6	叶绿素	5.36

续表

序号	环境因子	相对影响
7	风速	5.08
8	硅酸盐	4.71
9	亚硝酸盐	3.94
10	盐度	3.42
11	铵盐	2.61
12	化学耗氧量	2.07
13	硝酸盐	1.78
14	晴天	0.12
15	阴天	0.00
16	雨天	0.00

从表 6-10 以及图 6-17 可以看出，对浮游植物总量的影响大小依次为气压 > 磷酸盐 > pH 值 > 溶解氧 > 表层水温 > 叶绿素 > 风速 > 硅酸盐 > 亚硝酸盐 > 盐度 > 铵盐 > 化学耗氧量 > 硝酸盐 > 晴天 > 阴天 > 雨天。实际上，晴天、阴天、雨天是光照因子的三个名义水平，它们对浮游植物总量的影响很小以致可以忽略。另外浮游植物总量针对光照因子的三个水平的方差分析表(ANOVA)(表 6-11)也说明光照因子的不同水平对浮游植物总量没有影响。而方差分析表是假定每组数据来自正态分布且方差相同，也可以采用不必假定方差相等的均值检验(B. L. Welch, 1951)，检验的结果如下：

$$F = 0.958\,8,\ df(num) = 2.00,\ df(dunom) = 12.16,\ p\text{-}value = 0.410\,5$$

这同样加强了以上结论。6.5.2 节直接从环境因子与浮游植物总量数据的秩相关系数以及 Hoeffding 独立性检验统计量出发，得到各种环境因子对浮游植物总量的影响大小次序为气压 > pH 值 > 盐度 > 硅酸盐 > 风速 > 表层水温 > 溶解氧 > 硝酸盐，其他的因子如磷酸盐、叶绿素、亚硝酸盐、铵盐、化学耗氧量、光照可以认为对浮游植物总量没有贡献。两者都认为气压、pH 值、表层水温、硅酸盐、盐度对浮游植物总量的影响很大，有所差别的是因子磷酸盐和叶绿素，6.5.2 节认为对浮游植物总量没有影响，而这里分析出它们对浮游植物总量影响很大，尤其是磷酸盐。一个原因是秩相关系数只是检验单调性，不是对所有的关系都能检验出来。另一个原因是分别计算各种因子与浮游植物总量的秩相关系数，而没有考虑其他因子的交叉作用。

表 6-11　浮游植物总量针对光照因子的三个水平的方差分析表

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(> F)
sr	2	0.016 56	0.008 28	0.265 1	0.767 8
Residuals	90	2.811 38	0.031 24		

2. 模型偏相关可视化

函数的可视化是数据分析的一个重要工具，但是可视化只是限制在一、二元函数。一元函

数的图形表达包括散点图(自变量连续),方格图(自变量是名义水平变量)等等。二元函数表达常用的是等高图。高于二元的函数很难通过图形表达,一种有用的想法是考虑部分自变量对整个函数的偏相关性,然后收集这些图形,从而对函数的整体形成大概的印象,能够给出一些有用的建议。

令 z_l 是自变量 $x=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的一个大小为 l 的子集和,即

$$z_l=\{z_1,\cdots,z_l\}\subset\{x_1,\cdots,x_n\}$$

$z_{\backslash l}$ 是补集,即

$$z_l\cup z_{\backslash l}=x$$

所以模型 $\hat{F}(x)=\hat{F}(z_l,z_{\backslash l})$。如果将 $z_{\backslash l}$ 固定,则 $\hat{F}$ 就是 z_l 的函数,这就是通常所讲的截面。人们所关心的是 z_l 对函数 $\hat{F}(x)$ 的影响,这随着 $z_{\backslash l}$ 不同而不同,为了减少对 $z_{\backslash l}$ 的依赖性,平均是一种很好的方法,即

$$\bar{F}(z_l)=E_{z_{\backslash l}}[\hat{F}(x)]=\int\hat{F}(z_l,z_{\backslash l})p_{\backslash l}(z_{\backslash l})\mathrm{d}z_{\backslash l} \tag{6-66}$$

$p_{\backslash l}(z_{\backslash l})$ 是 $z_{\backslash l}$ 的边缘密度。(6-66)的一个估计就是

$$\bar{F}(z_l)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{F}(z_l,z_{i,\backslash l}) \tag{6-67}$$

其中 $z_{i,\backslash l}$ 表示第 i 个样本变量 z、l 的取值。式(6-67)对所有“黑盒子”的预测方法如人工神经网络、支持向量机等等都有效,对于单变量分割的回归树,式(6-67)的计算直接从回归树中得到,不需要通过样本。给定 z_l,不同 $z_{\backslash l}$ 对应的函数值 $\hat{F}(z_l,z_{\backslash l})$ 可能是相同的,对于 N 个样本来说,就是计算不同 $z_{\backslash l}$、相同 $\hat{F}(z_l,z_{\backslash l})$ 的观测值占整个样本的比例,带权重的二叉树的周游算法可以做到。首先,根结点权重为 1,依次遍历每个非叶结点,如果分割变量属于 z_l,对应的左或右子结点遍历,权重不变;如果分割变量属于 z_l 的补集 $z_{\backslash l}$,两个子结点都遍历,权重就乘以落入相应左或右子结点样本数量同落入父结点样本数量的比例。到达某一个叶结点,赋予该叶结点当前权重,把所有遍历的叶结点对应的函数值按赋予的权重加权平均就是 $\hat{F}(z_l)$,M 棵树取平均即可。

图 6-18 显示对浮游植物总量最有影响的环境因子 p(气压)、PO_4(磷酸盐)、pH 值、DO 单个变量分别与浮游植物总量的偏相关。图 6-19、图 6-20、图 6-21 分别显示了两个变量对浮游植物总量影响的偏相关性。从图 6-18 明显可以知道浮游植物总量随着磷酸盐的增加而增大,且磷酸盐存在一个临界点,当超过这个临界点,磷酸盐再增大,浮游植物总量也不会增加。可见在渤海湾赤潮的形成过程中,磷酸盐扮演着一个重要的角色。图 6-19 和图 6-20 指出磷酸盐和 pH 值的交互作用比磷酸盐和气压的交互作用强得多。

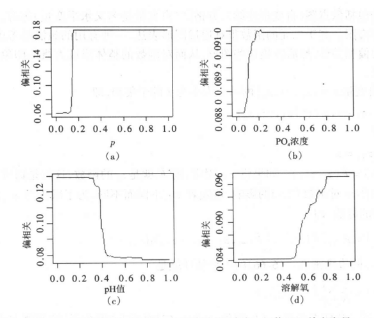


图 6-18 环境因子 p(气压)、PO_4(磷酸盐)浓度、pH 值、DO 单个变量分别与浮游植物总量的偏相关

(a)气压与浮游植物总量偏相关;(b)磷酸盐与浮游值物总量偏相关

(c)pH 值与浮游植物总量偏相关;(d)溶解氧与浮游植物总量偏相关

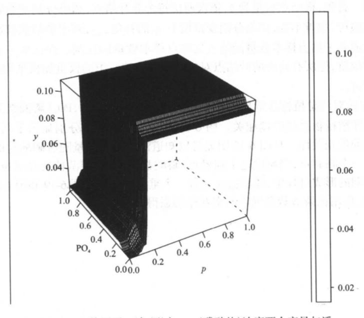


图 6-19 环境因子 p(气压)与 PO_4(磷酸盐)浓度两个变量与浮游植物总量的偏相关

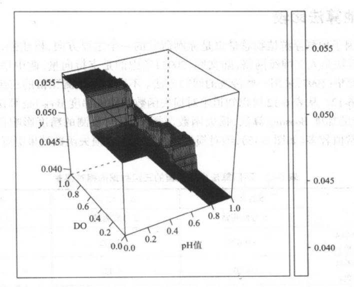


图 6-20 环境因子 pH 值、DO 两个变量与浮游植物总量的偏相关

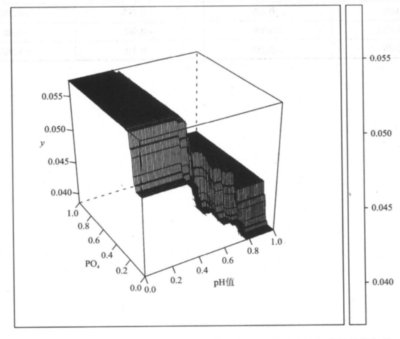


图 6-21 环境因子 PO_4(磷酸盐)浓度、pH 值两个变量与浮游植物总量的偏相关

6.5.4 其他算法比较

基于环境因子预测浮游植物总量也是赤潮研究的一个主要方向，杨建强(2003)和蔡如钰(2001)选择的算法是人工神经网络，陆文聪(2002)考虑的是支持向量，谢中华(2004)、林祖享(2002)以及黄奕华(1997)采用一些传统的回归方法。不同算法预测预留的三组数据的相对误差的结果见表6-12。从表6-12可以知道绝对损失函数的随机梯度Boosting算法更稳健。值得注意的是，同样的梯度Boosting算法，损失函数选择不同，对预测的精度影响很大。由于浮游植物总量的异常值较多(如图6-13)，绝对损失函数就比平方损失函数效果更好。

表6-12 不同算法预测预留的三组数据的相对误差

相对误差	5月22日	6月12日	8月7日
	5号监测站	2号监测站	4号监测站
随机梯度Boosting(绝对损失函数)	-0.428	-0.172	0.204
随机梯度Boosting(平方损失函数)	-4.03	-1.151	-1.378
支持向量回归	0.701	-1.901	-0.339
人工神经网络	-0.328	-4.186	0.059
MARS	-0.439	0.277	-0.336
投影寻踪	-0.191	-0.092	-6.85
回归树	-0.357	0.318	-1.383

第 7 章　赤潮的神经网络与支持向量机预测

本章详细探讨了运用神经网络和支持向量机来预测赤潮的方法。最后一部分阐述了知识发现在处理海洋监测数据中的应用。

7.1　人工神经网络方法

人工神经网络在 20 世纪 80 年代获得迅速发展。它是模拟人脑结构的一种大规模的并行连接机制系统，不需要有关体系的先验知识，具有自适应建模学习及自动建模功能。已经证明，神经网络能够任意充分地逼近非线性关系，它既可用来估计常规模型中的参数，也可用于直接描述系统的动力学特性。在影响预测对象的因素还未完全明确之前，将其应用于预测研究是一个较好的选择。

7.1.1　神经网络结构

神经元是人工神经网络的基本处理单元，一般为非线性输出单元。神经元输出既受输入信息的影响，也受神经元内部其他因素影响，因此需加入一个门限值或阈值，见图 7-1。

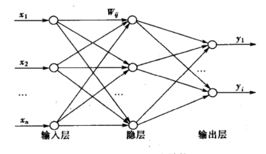


图 7-1　神经网络结构

图 7-1 中神经元有 n 个输入 $x_j(j=1,2,\cdots n)$，x_j 的矩阵形式为 $\boldsymbol{X}=[x_1\quad x_2\quad \cdots\quad x_n]^{\mathrm{T}}$，通过对每个输入赋予权重 ω_{ij}（ω_{ij} 的矩阵形式为 $\boldsymbol{W}=[\omega_{i1}\quad \omega_{i2}\quad \cdots\quad \omega_{in}]$）以后，进行 $\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}x_j$ 形式求和，形成激活函数 f 的输入。激活函数 f 的另一个输入是神经元的阈值 ϑ_i，最后形成输出 y_i。神经元模型输出表示为

$$y_i=f\left(\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}x_j+\vartheta_i\right) \tag{7-1}$$

神经网络的激活函数的作用为：

①控制输入、输出；

②对输入、输出进行函数转换；

③对输出范围进行限制。

神经网络的基本模式有前向型、自组织型及随机型网络。

前向型神经网络是一种运用广泛的映射性网络，它能通过样本对(x,y)学习某种函数关系 $y=f(x)$。通常，前向型神经网络除了输入、输出外，每一层的节点（神经元）的输出与下一层的每个节点相连。对于同层的神经元而言其信息处理方式是并行的，但层与层之间的信息处理方式则是串行的。

设：ϑ_{ik} 表示 k 层第 j 个神经元的阈值，W_{ijk} 表示 $k-1$ 层第 j 个神经元与第 k 层第 i 个神经

元之间的连接权，net_{ik}表示 k 层第 i 个神经元的输入，O_{ik}表示 k 层第 i 个神经元的输出，m_k 表示第 k 层神经元数目，则每个神经元的输入

$$net_{ik}=\sum_{j=1}^{m_{k-1}}W_{ijk}O_{jk-1}+\vartheta_{ik} \tag{7-2}$$

神经元的输出

$$O_{ik}=f(net_{ik}) \tag{7-3}$$

$$f(net_{ik})=\frac{1}{(1+e^{-net_{ik}})} \tag{7-4}$$

对于一个三层前向型神经网络，其结构表示如下。

第一层：

$$O_{i1}=x_i \quad (i=1,\cdots,m_1) \tag{7-5}$$

第二层：

$$net_{i2}=\sum_{j=1}^{m_1}W_{ij2}O_{i1}+\vartheta_{i2} \tag{7-6}$$

$$O_{i2}=f(net_2) \quad (i=1,\cdots,m_2) \tag{7-7}$$

第三层：

$$net_{i3}=\sum_{j=1}^{m_2}W_{ij3}O_{i2}+\vartheta_{i3} \tag{7-8}$$

$$y_i=O_{i3}=f(net_{i3}) \quad (i=1,\cdots,m_3) \tag{7-9}$$

若已知参数 W_{ijk}、ϑ_{ik}，则由给定的输入 x_i 可向前并行计算出每层各节点的输入与输出，并得到输出 y_i。

对于多层前向型神经网络

$$net_{ik}=\sum_{j=1}^{m_{k-1}}W_{ijk}O_{i(k-1)}+\vartheta_{ik} \tag{7-10}$$

$$y_i=O_{ik}=f(net_{ik}) \quad (i=1,\cdots,m_k) \tag{7-11}$$

由于多层前向神经网络具有逼近任意复杂连续函数的能力，因此该网络非常适合于对时间序列进行预测。在具体使用中，不需要对所分析的时间序列作出任何假设，通常是根据已有的样本数据对网络进行训练。训练的过程就是预测均方差达到全局最小的过程，也是预测模型的建立过程。从统计观点看，神经网络建模的最终结果是逼近所描述系统的非线性函数，并用网络的连接权值和阈值来表示。

如何设计多层感知器隐层单元的个数？这里给出隐层单元数的上下限，以供设计时参考。令隐单元输出 $h_j=\mathrm{sgn}(\sum_{i=1}^{n}\omega_{ij}x_i-\theta_j)$是一个线性阈值分割函数，每个隐单元把 n 维输入空间 S 划为 S_A 和 S_B 两个部分。设 g 是定义在 S 空间的一个函数，对于感知器网络对应的 k 个样本输入，希望其满足

$$y_l=\mathrm{sgn}(\sum h_j\omega_j^*-\theta^*)=g(x_l) \quad (l=1,2,\cdots,k) \tag{7-12}$$

问题是能否找到隐单元数 n_1，通过调整输出单元的系数 ω_j^*、θ^* 使上式满足条件，即可实现任何一个 g 函数的映射。

在一个输入空间 S 上，存在有 k 个样本，如果需要用 n_1 个超平面划分为 d 个区域，使 $d > k$，并保证每个区域对应于一个样本，则最大的隐单元数 n_1 应满足：$n_1 = k - 1$，其中 k 为输入样本数。

隐单元数为 $k-1$ 时设计网络的上限。因为 $k-1$ 超平面是不相交的，所以只可分为 k 个区域，但考虑到超平面可交且只有一个隐层的情况下，输入为 n 个单元，n_1 个隐单元可把输入空间划分成一定数目的区域，如果这个区域是封闭的，称之为闭区域。在数学上可得到独立区域数

$$p(n_1, n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n_1}{i} \quad (n_1 \geqslant i) \tag{7-13}$$

其中

$$\binom{n_1}{i} = 0 \quad (n_1 < i)$$

那么，对 k 个样本进行线性分割时要求

$$n_1 = \min[p(n_1, n)] \geqslant k \tag{7-14}$$

式 7-14 给出了隐单元数的下限，即使得 $p(n_1, n)$ 为最小（$p(n_1, n)$ 应大于样本数）时的 n_1 值。

7.1.2　神经网络算法

1986 年，Mcclelland 和 Rumelhart 提出了多层前向型神经网络的误差反传算法（Back Propagaton，简称为 BP 算法）。下面以代价函数取误差平方和的形式为例，分步骤介绍图 7-1 所示网络的误差逆传播学习。

①给 L_A 层单元到 L_B 层单元的连接权 v_{hi}、L_B 层单元到 L_c 单元的连接权 ω_{ij} 以及 L_B 层单元的阈值 θ_i、L_c 层单元的阀值 γ_i 分别赋[-1,1]区间的随机值。

②对于每个模式，对 $(A_k, C_k)(k = 1, 2, \cdots, m)$ 进行下列操作。

a. 将 A_k 的值送到 L_A 层单元，再将 L_A 层单元的激活值 a_h 通过连接权矩阵 $\boldsymbol{V}$ 送到 L_B 层单元，产生 L_B 层单元新的激活值

$$b_i = f\left(\sum_{h=1}^{n} v_{hi} a_h + \theta_i\right) \tag{7-15}$$

式中，$i = 1, 2, \cdots, p$；f 为 S 型函数，即

$$f(x) = (1 + e^{-x})^{-1} \tag{7-16}$$

b. 计算 L_c 层单元的激活值

$$c_j = f\left(\sum_{i=1}^{p} \omega_{ij} b_i + \gamma_i\right) \tag{7-17}$$

式中，$j = 1, 2, \cdots, q$。

c. 计算 L_c 层（输出层）单元的一般化误差

$$d_j = c_j(1 - c_j)(c_j^k - c_j) \tag{7-18}$$

式中，$j = 1, 2, \cdots, q$；c_j^k 为 L_c 层单元 j 的期望输出。

d. 计算 L_B 层单元相对于每一个 d_j 的误差

$$e_i = b_i(1-b_i)\sum_{j=1}^{q}\omega_{ij}d_j \tag{7-19}$$

式中，$i=1,2,\cdots,p$。上式相当于将 L_c 层单元的误差逆传播到 L_B 层。

e.调整 L_B 层单元到 L_C 层单元的连接权

$$\Delta\omega_{ij} = \alpha b_i d_j \tag{7-20}$$

式中，$i=1,2,\cdots,p$；$j=1,2,\cdots,q$；α 为学习率($0<\alpha<1$)。

f.调整 L_c 层单元的阈值

$$\Delta\gamma_j = \alpha d_j \tag{7-21}$$

式中，$j=1,2,\cdots,q$。

h.调整 L_A 层单元到 L_B 层单元的连接权

$$\Delta v_{hi} = \beta a_h e_i \tag{7-22}$$

式中，$h=1,2,\cdots,n$；$i=1,2,\cdots,p$；$0<\beta<1$。

i.调整 L_B 层单元的阈值

$$\Delta\theta_i = \beta e_i \tag{7-23}$$

式中，$i=1,2,\cdots,p$。

③重复步骤②，直到对于 $j=1,2,\cdots,q$ 和 $k=1,2,\cdots,m$，误差 d_j 变得足够小或者变为零为止。

这种算法的主要思想是把学习过程分为两个阶段：第一阶段(正向传播阶段)，输入信息从输入层经过隐含层逐层处理并计算出各单元的实际输出值；第二阶段(反向过程)，若在输出层不能得到期望的输出，从后向前修正各层次之间的联系权重，在不断的学习和修正过程中，可以使网络的学习误差达到最小。实际上，当误差达到人们所希望的要求时，网络的学习过程就结束了。

7.1.3 遗传算法介绍

遗传算法是模拟生物进化过程的计算模型，它是自然遗传学和计算机科学相互结合渗透而形成的新计算方法。生物从其亲代继承特性或性状的现象称为遗传。生物的遗传载体是染色体，而基因是控制生物遗传的基本单位，多个基因组成染色体。染色体中基因的位置称为基因座，同一基因座可能有的全部基因称为等位基因。等位基因和基因座决定了染色体的特征，也就决定了生物个体的性状。此外，染色体有两种相应的表示模式，分别为基因型和表现型。所谓表现型是指生物个体所表现出来的性状，而基因型指与表现型密切相关的基因组成。同一种基因型的生物个体在不同的环境条件下可以有不同的表现型，所以表现型是基因型与环境条件相互作用的结果。在遗传算法中，染色体对应的是符号序列，在标准的遗传算法中，通常是由一维的 0-1 串来表现。串上各个位置对应上述的基因座，而各位置上所取的值对应上述的等位基因。遗传算法处理的对象是染色体，或者叫基因个体。一定数量的个体组成了群体。群体中个体的数目称为群体规模，而各个体对环境的适应程度叫做适合度。

遗传算法包含两个必须的数据转换操作，一个是表现型到基因型的转换；另一个是基因型到表现型的转换。前者把搜索空间中的参数或可行解转换成遗传空间中的染色体或个体，此过程叫做编码操作。后者是前者的一个相反操作，叫做译码操作。生物在世代繁衍中，能够通

过自然选择逐渐向适应于生存环境的方向进化，遗传进化过程包括三种演化操作：在父代基因群体中双亲的选择操作；两个父代双亲个体的交叉操作，产生子代的基因个体；子代基因群体中的变异操作。

遗传算法的 5 个基本要素是：对可行解空间的参数编码；祖先群体的设定；适合度函数的设计；遗传操作的设计；控制参数的设定（群体规模大小、使用各遗传算子操作的概率和迭代停止准则）。这 5 个要素构成了遗传算法的核心内容。遗传算法流程如图 7-2 所示。

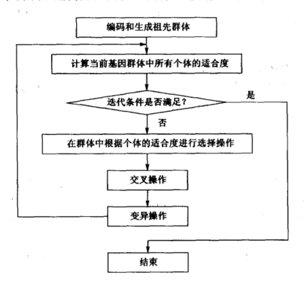


图 7-2　遗传算法流程示意图

(1)编码与基因码链

由于遗传算法不能直接处理解空间的解数据，所以必须通过编码处理将它们表示成遗传空间中的基因型串结构数据。首先对每一个自变量进行编码，一般用一定位数的二进制码代表一个自变量的各种取值，然后将各自变量的二进制码连成一串，得到一个二进制码串，它代表了自变量的一组取值所决定的一个可行解。

(2)祖先群体的生成

由于遗传算法的群体性操作需要，所以必须为遗传操作准备一个由若干初始解组成的祖先群体。具体由计算机按随机方法，通过伪随机数产生一系列的二进制码链，每一码链代表祖先群体中的一个祖先个体，而一定数量的祖先个体就构成最原始的祖先群体。祖先个体的素质通常很差，遗传算法的任务是从这些祖先出发，模拟进化过程，择优汰劣，使基因群体的平均素质逐步提高，最后找出非常优秀的群体与个体。

(3)基因个体素质的评价

在遗传算法的搜索过程中一般不需要其他外部信息，仅用评价函数值来评估基因个体或解的优劣，并作为以后遗传操作的依据。这个评价函数值称为基因个体的适合度，一般它取为目标函数。

(4)选择操作

选择或复制操作的目的是为了从当前群体中选出优良的个体，使它们有机会作为父代繁

衍子孙。判断个体优良与否的准则就是各自的适合度。显然这一操作是借用了达尔文适者生存的进化原则,即个体的适合度越高,其被选择的机会越多。选择操作的方法很多,通常采用的有赌轮法,它采用与适合度成比例的概率方法来进行选择。具体地说,就是首先计算群体中所有个体适合度的总和$\sum_{i=1}^{N} f_i$,然后计算每个个体的适合度所占的比例$f_i / \sum_{i=1}^{N} f_i$,并以此作为相应的选择概率,根据这个概率可计算出每个个体被选择的次数,将被选择的个体送到配对库中配对繁殖。如此选择与复制的结果,使得适合度高的基因个体有更多的机会繁殖后代,使其优良特性得以遗传和保留。

(5)交叉操作

交叉操作是从配对库中随机选出双亲进行位串处理得到新一代的基因个体。最简单的交叉操作是单点交叉,该操作可以分两步进行:首先对配对库中的个体进行随机配对得到双亲;其次,随机地选取一个截断点,将双亲的基因码链在截断点切开,然后交换其尾部得到它们的两个后代基因个体。

(6)变异操作

变异操作同样也是随机进行的,以一定的概率选择群体中的若干个体,对已选取的每个个体,随机选取某一位,将该位的数码取反。变异操作是一个十分微妙的遗传操作,在自然选择的作用下,有利的变异会得以遗传与保留,而有害的变异会在逐代遗传中被淘汰。它需要和交叉操作妥善配合使用,其目的是挖掘群体中个体的多样性,克服有可能陷于局部解的弊病。

用通过选择、交叉和变异操作得到的新一代群体代替其上一代群体,再回到上述的步骤(3),对新一代群体的各个个体再进行评价。如此迭代下去,各代群体的优良基因成分逐渐积累,群体的平均适合度和最优个体适合度不断上升,直到迭代过程趋于收敛,即适合度趋于稳定,不再上升时,群体中适合度最大的一些个体所对应的可行解就是该优化问题的满意解。

7.1.4 模糊神经网络

神经网络系统和模糊系统都是处理不精确的、模糊的信息,都是利用数值化了的信息来建立特定的非线性映射,但二者在知识的存储与表达、计算精度、自适应能力等方面存在很大的差异。而计算机技术的迅速发展促使人们对模糊信息的处理提出更高的要求,使神经网络系统和模糊系统取长补短,走向结合之路。目前,由于模糊神经网络在处理非线性、模糊性等问题上的优越性,也由于它在智能信息处理方面巨大的潜力,使得越来越多的专家学者投入到这个领域中来,并取得了卓有成效的研究成果。

对于模糊系统,它是通过人为建立规则库,然后通过规则的形式存储知识,再通过存储的规则匹配实现知识的推理。由于模糊系统的基本运算是加法和乘法,它的处理速度快,但计算精度低。在非线性映射层次上,神经网络实现的是点到点之间的非线性映射,所反映的输入—输出关系曲面是近似光滑的,而模糊系统实现的是区域块到区域块之间的非线性映射,所对应的输入—输出关系曲面是粗糙的梯形台阶。随着计算机技术的发展,人们对非数值信息处理的要求越来越高,因此,当神经网络和模糊理论面对更复杂问题和更广泛领域都遇到困难的时候,两者的相互促进、相互补充就成为必然。它们相结合的产物就是模糊神经网络。美国南加州大学的 B. Kosko 是研究神经网络和模糊逻辑相结合的著名专家,他提出模糊联想记忆、模糊认知图的重要概念。普度大学的 C. T. Lin 和 C. S. G. Lee 提出基于神经网络的模糊控制和决策

系统，它按照输入模糊化、模糊规则推理和输出解模糊化的顺序构成多层前馈型神经网络结构，模糊逻辑运算融入神经元和网络结构中。V. Pedrvcz 构造两种神经元，其一是聚合逻辑神经元，它可进行或、与、及逻辑运算，从而实现输入信号的聚合；其二是参考逻辑神经元，它首先相对于参考点分析输入信息，包括匹配、包含、差异与支配，分析结果被综合在前一种神经元的聚合部处。J. M. Keller 提出实现模糊逻辑推理的神经网络结构及三种变形。R. R. Yager 构造一种按序加权平均的模糊神经元，它采用矢量 V 来代替通常神经元中的激励函数。J. J. Bucklev 研究神经网络、连续函数和模糊系统之间的数值关系，证明了混和神经网络能实现连续模糊函数。

当人们在实际应用领域中需要用模糊神经网络来实现模式识别、自适应控制、故障检测等应用时，会遇到一些疑难：如何建网、具体细节如何处理等等。在对许多应用实例归纳整理的基础上，作者提出以下建议。首先，必须根据实际问题确定输入特征向量和隶属函数，特征向量实际上就是模糊中的模糊变量，每个模糊变量对应若干个模糊子空间，而模糊变量属于某一子空间的隶属度，由相应的隶属函数来确定。在网络中，把输入特征向量经模糊化后对应的节点称为模糊节点。其次，选择网络的算法，现在已有许多理论成熟的神经网络算法，每一种算法都有其优缺点及其适用的领域，因此，选择网络算法时要考虑到实际应用的需要及网络的推广与优化能力。第三，必须根据实际需要确定网络的拓扑结构，即网络具体由几层构成，每一层应该设置几个节点，合理的网络结构会使网络的学习收敛过程加快，能有效减少网络的复杂性。

1. 输入特征向量的确定

对一个实际问题，特征向量的确定是十分重要的。选择特征向量时，要考虑到应选的向量是否完全地描述了问题的本质特征。如果特征向量不能有效地表达事物的特征，网络经训练后的输出可能与实际有较大的误差。当然，特征向量的选取并不是越多越好，输入特征向量个数的增多，将使网络的计算量呈指数增长，会导致组合爆炸。所以，在选择特征向量时，应从实际出发，根据领域专家的意见，适当地选择最能表现事物本质的变量。隶属函数的选择，同样也要从实际出发，然后作合理的假设与选择。确定隶属函数的方法很多，可以请领域专家评分，也可以通过 F 统计试验来确定，还可以用概率统计的处理结果来确定。对于不同的问题，应该采用不同的方法。在许多应用中，由于人们认识事物的局限性，开始只能建立一个近似的隶属函数，然后通过学习逐步修改完善。在客观事物中，有很多是以实数集 $\mathbf{R}$ 作论域，把实数集 $\mathbf{R}$ 上 F 集的隶属函数称为 F 分布。有一些常用的 F 分布可供实际应用时选择，如矩形分布或半矩形分布、半梯形分布或梯形分布、抛物形分布、正态分布、柯西分布、岭形分布、三角分布等。

2. 网络算法确定

模糊神经网络已有很多理论成熟的算法与模型，改进的算法和新的模型也不断涌现，不同算法与模型应用领域不同。例如，FMM、F-ART、FLUQ 主要适用于模式识别或分类系统；模糊 CMAC 神经网络适用于机器人控制；FlviL. P 适用于非线性系统辨识或故障诊断；F'NN 的适用范围较广。在选择网络算法时，要从算法的适应范围、网络的规模、算法实现的难易、网络的容量和可推广性等方面综合考虑。有时，可以采用几种不同的算法建模，用相同样本来训练它们，比较它们的收敛时间、收敛精度、训练次数、仿真结果等特性，选择最适用于本领域的一种算法。

3.网络结构描述

(1)网络拓扑结构描述

不同的模糊神经网络模型,有不同的网络拓扑结构,其结构的构造方法各有特点。比较各网络结构的异同,可以找到它们的共同点,即模糊神经网络基本上都由三层构成,可把它们用一种统一的结构形式表示,如图7-3所示。

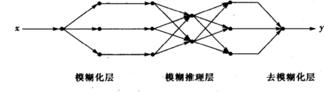


图7-3 模糊神经网络结构

第一层为模糊化层。它实现输入变量的模糊化,完成一个隶属函数的计算,计算出变量相对于每个模糊子空间的隶属度。模糊化层是每一类模糊神经网络必要的部分。

第二层是模糊推理层。模糊推理层是网络结构中相对重要的部分,它联系着模糊推理的前提和结论,实现网络的模糊映射。模糊推理层的结构是多样化的,可以是BP风络,也可以是R.BF网络或其他形式的网络,不同的结构对应不同的算法,而各种模型的区别正体现在这里。

第三层是去模糊化层。它将推理结论变量的分布型基本模糊状态转化成确定状态,负责给出确定的输出以便系统去执行。去模糊的常用方法有最大隶属原则和模糊质心法。在一些特定的网络中,可以不构造去模糊化层。

为了增强模糊神经网络的自适应性,通常模糊化层、模糊推理层和去模糊化层均由多层网络组成。这样,通过网络学习,就可以实现模糊推理模型中的隶属函数和模糊规则的自动调整。

(2)网络结构参数的确定

已经证明一个三层前馈网络可以逼近任何非线性函数,所以实际应用中的多数网络采用的都是三层前馈型网络结构。当输入特征向量及隶属函数确定以后,网络的输入层节点数和输出层节点数也随之确定。问题的关键是如何确定隐节点数。一般情况下,人们都是根据网络收敛性能的好坏来确定隐节点数的增减,这不仅带有很大的盲目性,而且是很费时间的过程。在总结了大量网络结构的基础上,有人用最小二乘法拟合得到了下面的公式。

初始隐节点的经验公式:

$$s = \sqrt{0.43mn + 0.12n^2 + 2.54m + 0.77n + 0.35} + 0.51$$

其中,m 是输入层节点数;s 是隐层节点数;n 是输出层节点数。在这个基础上,再根据实际需要作适当删减。

7.2 浮游植物密度的人工神经网络预测

据蔡如钰1997年的调查数据(表7-1),共计17个样本,浮游植物和夜光藻(Noctiluca scientillans)的监测按《海洋调查规范》(国家海洋局,1975)进行,水文、理化因子的采样及分析按《海

洋污染调查暂行规范》(国家海洋局 1979)执行。各种理化因子有水温 T、溶解氧 DO、盐度 S、总氮、可溶性无机磷、浮游植物密度等。

表 7-1　藻类密度和各理化因子数据

样本	水温(℃)	溶解氧(mg/L)	盐度	总氮(μmol/L)	总磷(μmol/L)	夜光藻密度 100 个/m³
1	22.9	7.06	30.3	0.4	0.54	1.77
2	23.1	7.5	30.4	0.56	0.39	470
3	23	7.44	30.6	0.81	0.18	440
4	23.2	7.54	30.5	0.52	0.07	180
5	23.4	7.62	30.4	0.88	0.07	160
6	23.4	7.54	29.5	0.23	0.43	60.4
7	22.9	7.56	30.8	0.83	0.21	23.7
8	24.2	7.83	30.5	0.14	0.4	8.28
9	22.5	6.97	30.4	0.52	0.56	7.6
10	24.7	7.56	30.2	0.32	0.32	91.5
11	23.2	7.31	30.4	0.73	0.26	467
12	23.1	7.12	30.2	0.17	0.4	5.99
13	23.5	7.38	30.3	0.31	0.47	4.04
14	23	7.06	30.3	0.4	0.54	2.8
15	23.7	7.36	30.5	2.05	0.36	260
16	23.3	7.22	30.4	0.72	0.1	530
17	23	7.14	30.3	0.27	0.43	7.56

7.2.1　当天模型

将数据分成训练和预测两部分(前 14 组数据为训练数据,后 3 组为预测数据),通过对数据的训练学习确定网络权重,并利用当天的参数数据计算当天的浮游植物密度。

网络结构一共三层,如图 7-4 所示。第一层为输入层,一共 5 个神经元,分别为水温 T、溶

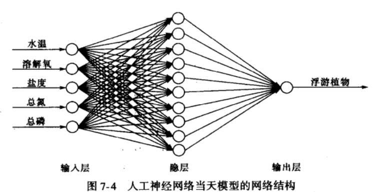


图 7-4　人工神经网络当天模型的网络结构

解氧DO、盐度、总氮和总磷的输入;第二层为隐层,共10个神经元;第三层为输出层,只有1个神经元,即浮游植物密度。各层之间均为全连接。采用误差反传算法对数据进行训练并进行预测计算。

网络各层的权重、训练和预测结果以及与实际结果的比较如表7-2、表7-3、表7-4和图7-5所示。

表7-2 人工神经网络当天模型的输入层——隐层权值

	输入1	输入2	输入3	输入4	输入5
隐层单元1	-0.718 267	-0.216 203	-0.545 868	0.320 741	0.328 222
隐层单元2	0.074 400	1.232 865	0.182 645	0.216 143	-0.844 433
隐层单元3	0.378 847	0.079 513	-0.805 540	0.126 479	0.083 931
隐层单元4	-0.035 771	-0.774 300	0.073 520	0.393 762	-0.245 258
隐层单元5	0.404 139	-1.270 318	0.495 454	0.957 078	-1.441 344
隐层单元6	1.418 173	-1.067 727	-0.013 942	-0.150 046	-0.078 007
隐层单元7	-2.527 854	3.182 386	0.118 786	0.232 620	0.411 087
隐层单元8	-0.500 070	0.723 310	-1.130 429	-0.547 095	0.797 746
隐层单元9	-2.250 972	1.221 322	-0.126 421	0.489 184	-0.393 268
隐层单元10	-0.297 852	0.077 235	-0.349 309	-0.426 842	-0.585 828

表7-3 人工神经网络当天模型的隐层——输出层权值

输出单元	隐层单元1	隐层单元2	隐层单元3	隐层单元4	隐层单元5
输出层权值	0.303 303	-1.185 229	0.844 900	0.081 040	1.240 213
输出单元	隐层单元6	隐层单元7	隐层单元8	隐层单元9	隐层单元10
输出层权值	-0.857 450	1.519 909	1.273 866	-2.644 059	0.636 958

表7-4 训练结果及预测值与实际数据比较 (10^4 个/m^3)

样本	实际数据	训练或预测结果	误差
1	148	148.009 239	0.009 239
2	146	146.065 025	0.065 025
3	31.1	30.914 431	-0.185 569
4	32	31.980 703	-0.019 297
5	31.8	31.621 352	-0.178 648
6	226	225.619 169	-0.380 831
7	9.72	10.088 851	0.368 851
8	148	148.021 298	0.021 298
9	187	187.034 285	0.034 285
10	10.5	10.480 414	-0.019 586
11	160	160.015 285	0.015 285

续表

样本	实际数据	训练或预测结果	误差
12	74.5	74.503 539	0.003 539
13	205	205.014 503	0.014 503
14	109	108.999 695	-0.000 305
15	125	101.059 556(预测)	-23.940 444
16	71.5	86.182 576(预测)	14.682 576
17	147	180.090 804 3(预测)	33.090 804 3

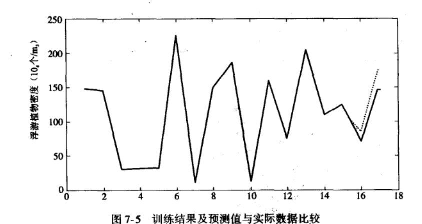


图 7-5　训练结果及预测值与实际数据比较

训练结果的平均误差为 0.094×10^4 个/m^3，预测值的平均误差为 23.905×10^4 个/m^3，标准偏差为 43.402×10^4 个/m^3。

该模型具有一定的局限性，根据当天的各因子数据来计算当天的浮游植物密度，并不能对实际的赤潮预测和防治起到指导作用。

7.2.2　预测模型

同样将数据分成训练和预测两部分，但网络结构有所不同，输入层增加一个神经元，即当天的浮游植物密度，而输出层为第二天的浮游植物密度。这样可以根据当天所测得的各因子数据以及浮游植物密度预测第二天的浮游植物密度，其中的时间间隔可以根据采集数据的条件以及藻类生长规律进行选择。由于各因子对藻类生长的影响有滞后性，这样建立模型更具有合理性，而且真正达到预测的效果。

网络结构如图 7-6 所示，网络各层的权重、训练和预测结果以及与实际结果的比较如表 7-5、表 7-6、表 7-7 及图 7-7 中所示。

表 7-5 人工神经网络预测模型的输入层——隐层权值

	输入 1	输入 2	输入 3	输入 4	输入 5	输入 6
隐层单元 1	-1.802 825	0.063 525	-1.088 660	0.545 153	0.498 579	0.737 376
隐层单元 2	0.749 094	0.188 265	0.371 993	-2.065 964	2.258 873	-1.404 734
隐层单元 3	-1.475 871	0.357 201	1.397 959	-0.993 486	0.354 617	-2.416 061
隐层单元 4	0.266 065	-0.073 108	-1.014 569	-0.368 921	0.666 635	0.119 301
隐层单元 5	0.319 508	1.137 026	1.028 523	-2.093 896	-1.007 556	0.953 536
隐层单元 6	-1.524 697	0.417 228	-1.070 101	-0.169 420	0.635 955	0.708 722
隐层单元 7	0.927 459	0.024 746	-0.404 394	0.823 187	-0.196 756	-0.542 467
隐层单元 8	1.465 480	-0.837 450	-0.007 136	0.129 786	-1.280 803	1.442 519
隐层单元 9	-0.225 250	1.467 466	-0.300 940	-0.479 915	1.121 976	-0.989 582
隐层单元 10	0.859 611	1.147 990	-2.170 308	1.345 184	-2.814 321	-0.260 694

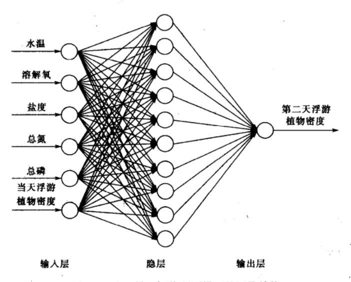


图 7-6 人工神经网络预测模型的网络结构

表 7-6 人工神经网络预测模型的隐层——输出层权值

输出单元	隐层单元 1	隐层单元 2	隐层单元 3	隐层单元 4	隐层单元 5
输出层权值	-1.366 328	1.170 752	1.325 724	-0.208 949	-1.010 967
输出单元	隐层单元 6	隐层单元 7	隐层单元 8	隐层单元 9	隐层单元 10
输出层权值	-1.171 205	-0.759 870	0.891 299	0.543 822	0.336 604

表 7-7　训练结果及预测值与实际数据比较　(10^4 个/m^3)

样本	实际数据	训练或预测结果	误差
1	148		
2	146	145.998 080	-0.001 92
3	31.1	31.099 390	-0.000 61
4	32	31.999 160	-0.000 84
5	31.8	31.800 649	0.000 649
6	226	225.875 857	-0.124 143
7	9.72	9.973 946	0.253 946
8	148	147.998 896	-0.001 104
9	187	187.001 528	0.001 528
10	10.5	10.675 865	0.175 865
11	160	160.001 044	0.001 044
12	74.5	74.499 838	-0.000 162
13	205	205.002 305	0.002 305
14	109	109.003 192	0.003 192
15	125	105.009(预测)	-19.991
16	71.5	34.483(预测)	-37.017
17	147	147.537(预测)	0.537

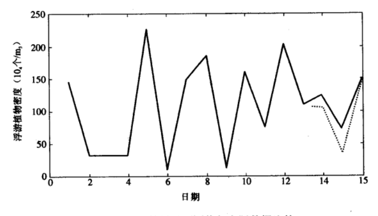


图 7-7　训练结果及预测值与实际数据比较

训练结果的平均误差为 0.044×10^4 个/m^3，预测结果的平均误差为 19.182×10^4 个/m^3，标准偏差为 42.074×10^4 个/m^3。

7.2.3　经过优化后的人工神经网络预测计算

1. 应用遗传算法优化网络结构

上述模型中隐层单元的选取完全依靠经验，因此不能保证网络结构的最优性。遗传算法可

以在保证计算的准确性的基础上优化网络的结构，将其应用于网络结构的优化，具体算法如下：

①随机产生多个编码串作为祖先群体，其中每一个编码串对应一种网络结构；

②解码，得到相应的网络结构，对每一种网络结构分别进行训练；

③根据训练结果计算每个个体的适应度函数值；

④选择一定数量适应度较大的个体直接遗传至下一代；

⑤对当代群体进行交叉、变异等遗传操作，产生下一代群体，④、⑤两个步骤产生的个体总数满足预先定义的群体大小；

⑥重复步骤②～⑤，直到当前一代群体中的某个个体满足要求为止。

由于对网络结构优化的目标一方面是简化网络的结构，删除多余的隐节点；另一方面，还要保持一定的精度。因此适应度函数应由隐节点数目和误差两部分组成，即

$$Fitness = \alpha \cdot N + \beta \cdot E$$

式中：N、E 分别为预先定义的隐节点数目及误差；α、β 为权重系数，$0<\alpha,\beta<1$，可根据要求具体设置。其他参数设置如下：

最大世代数 1 000 种群大小 50；最佳个体数 10；交叉率 0.2；变异率 0.004。

2.优化后的当天模型

经过优化后的人工神经网络的当天模型隐层只有 5 个神经元，其网络结构如图 7-8 所示。网络各层的权重、训练和预测结果以及与实际结果的比较如表 7-8、表 7-9、表 7-10 和图 7-9 所示。

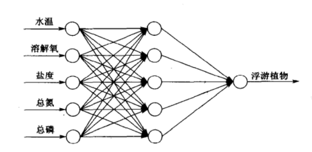


图 7-8 经优化后的人工神经网络当天模型网络结构

表 7-8 经优化后的人工神经网络当天模型的输入层——隐层权值

	输入 1	输入 2	输入 3	输入 4	输入 5
隐层单元 1	-0.991 145	-0.477 054	-3.961 245	2.597 752	2.311 056
隐层单元 2	0.512 693	0.658 072	0.577 414	-0.726 014	-1.970 721
隐层单元 3	0.258 567	2.765 120	0.947 446	-1.333 359	-2.776 343
隐层单元 4	-2.806 502	3.529 013	-3.231 765	-1.324 166	2.933 554
隐层单元 5	-0.465 299	-2.829 205	-1.128 642	3.395 778	-0.797 738

表 7-9 经优化后的人工神经网络当天模型的隐层——输出层权值

输出单元	隐层单元 1	隐层单元 2	隐层单元 3	隐层单元 4	隐层单元 5
输出层权值	0.231 982	2.212 216	-1.515 701	2.101 761	2.021 609

表 7-10　训练结果及预测值与实际数据比较　（10^4 个/m^3）

样本	实际数据	训练或预测结果	误差
1	148	147.987 841	-0.012 159
2	146	146.241 416	0.241 416
3	31.1	31.254 958	0.154 958
4	32	32.194 065	0.194 065
5	31.8	32.105 773	0.305 773
6	226	225.814 093	-0.185 907
7	9.72	10.402 757	0.682 757
8	148	148.576 419	0.576 419
9	187	186.895 496	-0.104 504
10	10.5	10.479 369	-0.020 631
11	160	160.083 963	0.083 963
12	74.5	74.518 929	0.018 929
13	205	205.063 065	0.063 065
14	109	108.984 706	-0.015 294
15	125	105.760 739(预测)	-19.239 261
16	71.5	101.600 979(预测)	30.100 979
17	147	146.762 000(预测)	-0.238

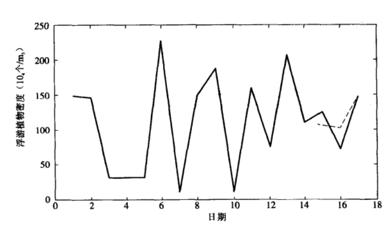


图 7-9　训练结果及预测值与实际数据比较

训练结果的平均误差为 0.189×10^4 个/m^3，预测结果的平均误差为 16.526×10^4 个/m^3，标准偏差为 35.725×10^4 个/m^3。

3. 优化后的预测模型

经过优化后的人工神经网络预测模型隐层共 5 个单元，其网络结构如图 7-10 所示。网络各层的权重、训练和预测结果以及与实际结果的比较如表 7-11、表 7-12、表 7-13 及图 7-11 所

示。

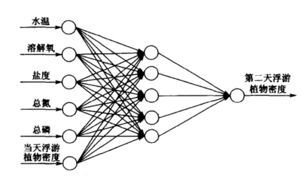


图 7-10 经优化后的人工神经网络预测模型网络结构

表 7-11 经优化后的人工神经网络预测模型的输入层——隐层权值

	输入 1	输入 2	输入 3	输入 4	输入 5	输入 6
隐层单元 1	0.197 196	-1.697 416	0.646 065	-0.371 352	-0.397 853	1.670 572
隐层单元 2	1.385 218	0.071 142	1.316 088	-2.018 926	4.231 406	-5.302 988
隐层单元 3	0.366 167	-0.384 987	0.464 140	0.009 431	-0.012 288	-0.093 794
隐层单元 4	-1.131 303	-1.080 958	-1.689 495	0.082 333	1.211 909	0.960 175
隐层单元 5	0.364 579	1.021 124	-2.552 955	1.894 906	-1.967 531	-0.336 046

表 7-12 经优化后的人工神经网络预测模型的隐层——输出层权值

输出单元	隐层单元 1	隐层单元 2	隐层单元 3	隐层单元 4	隐层单元 5
输出层权值	1.038 154	1.099 077	-1.158 533	-1.897 540	2.477 154

表 7-13 训练结果及预测值与实际数据比较 (10^4 个/m^3)

样本	实际数据	训练或预测结果	误差
1	148		
2	146	145.984 314	-0.015 686
3	31.1	31.057 497	-0.042 503
4	32	32.034 989	0.034 989
5	31.8	31.800 597	0.000 597
6	226	225.356 819	-0.643 181
7	9.72	10.059 984	0.339 984
8	148	147.985 481	-0.014 519
9	187	186.993 064	-0.006 936
10	10.5	10.701 528	0.201 528
11	160	160.008 091	0.008 091
12	74.5	74.496 682	-0.003 318

续表

样本	实际数据	训练或预测结果	误差
13	205	205.000 558	0.000 558
14	109	108.999 568	-0.000 432
15	125	145.805 837(预测)	20.805 837
16	71.5	68.294 592(预测)	-3.205 408
17	147	121.154 938(预测)	-25.845 062

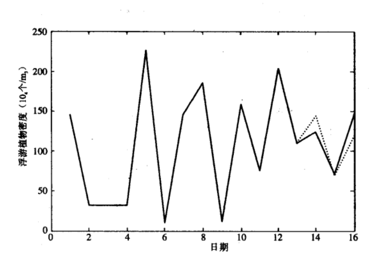


图 7-11　训练结果及预测值与实际数据比较

训练结果的平均误差为 0.101×10^4 个/m³，预测结果的平均误差为 16.619×10^4 个/m³，标准偏差为 33.334×10^4 个/m³。

7.2.4　模糊神经网络预测

1. 数据预处理

首先，为避免数据溢出，将数据进行归一化、标准化处理。归一化公式如下：

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$y_i = x_i - n\bar{x}$$

$$\text{ees} = \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{x})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$x_i' = \frac{x_i}{n \cdot \text{ees}}$$

其中，x_i 是原始样本值；$\bar{x}$ 是样本每列的平均值；n 是样本的个数；ees 是均方差；x_i' 是归一化以后的值。

标准化公式：

$$x_i'' = 0.9 - \frac{0.9[\max(x_i') - x_i']}{[\max(x_i') - \min(x_i')]}$$

其中，x_i'' 是标准化以后的值。

处理以后的数据如表 7-14 所示。

表 7-14 归一化标准化后的数据

样本	水温	溶解氧	盐度	总氮	总磷	夜光藻密度
1	0.245 45	0.183 71	0.592 3	0.208 9	0.867 33	0.1
2	0.318 18	0.593 02	0.653 84	0.275 92	0.622 44	0.809 15
3	0.281 82	0.537 2	0.776 92	0.380 63	0.279 58	0.763 69
4	0.354 55	0.630 23	0.715 38	0.259 16	0.1	0.369 93
5	0.427 27	0.704 64	0.653 84	0.409 95	0.1	0.339 64
6	0.427 27	0.630 23	0.1	0.137 7	0.687 75	0.188 79
7	0.245 45	0.648 83	0.9	0.389 01	0.328 56	0.133 21
8	0.718 19	0.9	0.715 38	0.1	0.638 77	0.109 86
9	0.1	0.1	0.653 84	0.259 16	0.9	0.108 83
10	0.9	0.648 83	0.530 76	0.175 39	0.508 16	0.235 9
11	0.354 55	0.416 28	0.653 84	0.347 12	0.410 2	0.804 6
12	0.318 18	0.239 53	0.530 76	0.112 56	0.638 77	0.106 39
13	0.463 64	0.481 39	0.592 3	0.171 2	0.753 05	0.103 44
14	0.281 82	0.183 71	0.592 3	0.208 9	0.867 33	0.101 56
15	0.536 36	0.462 79	0.715 38	0.9	0.573 46	0.491 09
16	0.390 91	0.332 55	0.653 84	0.342 93	0.148 96	0.9
17	0.281 82	0.258 14	0.592 3	0.154 45	0.687 75	0.108 77

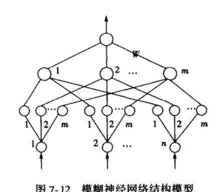


图 7-12 模糊神经网络结构模型

2. 模糊神经网络结构

(1)结构模型

结构模型如图 7-12 所示。该模型分为四层。

第一层为变量输入层。输入变量为 $x_j, j=1,2,\cdots,n$，n 为输入变量的个数。

第二层为模糊化层。该层的每个节点代表模糊规则的前提部分，其输入是第一层的输出，其输出代表每个输入变量对规则前提部分的隶属度。隶属度函数采用正则化高斯函数

$$C_{ij} = \exp\left[\frac{-(x_j - v_{ij})^2}{\delta_{ij}}\right]$$

$$(i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n)$$

其中：m 是模糊规则数；n 是输入节点数；v_{ij}、δ_{ij} 分别是高斯隶属度函数的中心和宽度。

第三层为模糊推理层。该层的模糊复合算子采用强积算子(sup product),则第 i 条模糊规则的输出部分节点函数

$$u_i = \prod_{j=1}^{n} C_{ij}(x_j)$$

第四层为去模糊化——输出层。该层采用重心非模糊化的方法,网络的输出

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{m} u_i \omega_i}{\sum_{i=1}^{m} u_i}$$

其中,ω_i 是第三层第 i 个节点到输出节点的耦合权值。

(2)模糊神经网络的学习算法

网络权值(v_{ij}, δ_{ij}, ω_i)的学习算法采用 BP(误差反向传播)算法。

目标函数取为

$$E = \frac{1}{2}(y - Y)^2$$

其中,y 是输出;Y 是目标矢量。按下列公式调整 v_{ij}、δ_{ij}、ω_j 的值,即

$$v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) - \eta \frac{\partial E}{\partial v_{ij}} + \beta \Delta v_{ij}(t)$$

$$\delta_{ij}(t+1) = \delta_{ij}(t) - \eta \frac{\partial E}{\partial \delta_{ij}} + \beta \Delta \delta_{ij}(t)$$

$$\omega_i(t+1) = \omega_i(t) - \eta \frac{\partial E}{\partial \omega_i} + \beta \Delta \omega_i(t)$$

其中,η、β、Δ 分别为学习率、动量项系数和误差项。

3. 网络的参数确定

(1)确定输入变量个数 n

通常认为,5 种理化因子对赤潮藻类浓度影响较大,所以输入变量为 5 个,即 $n = 5$。

(2)确定最优规则数 m

本文采用 K－means 模糊聚类算法来确定模糊系统的最优规则数,以最优规则数作为网络的隐层节点数。该方法的最大优点是能快速找到系统的数据结构,但是精度不高。而神经网络的学习能力弥补了这个缺陷。

对归一化后样本(表 7-14)进行计算,算法得出最优聚类数 $m = 3$,样本 1、6、9、12、13、14、17 属于第一类;样本 2～5、11、16 属于第二类;样本 7、8、10、15 属于第三类。

初始权值如表 7-15 所示。

表 7-15　初始权值

类别	输入 1	输入 2	输入 3	输入 4	输入 5
1	0.6	0.665 11	0.715 38	0.391 1	0.512 24
2	0.302 6	0.296 67	0.521 97	0.178 98	0.771 71
3	0.354 55	0.535 65	0.684 61	0.335 95	0.276 86

(3)确定初始权值 ω_i

权值一般随着迭代是收敛的,但是若初始值太大,会使网络很快饱和。另外,初始权值对收敛速度也有影响。初始值只要不是过大,对网络的整体性能影响并不大。本节初始权值 ω_i 为0.05。

(4)选取适当的学习率 η 和动量项系数 β

学习率 η 若选得太小,会使网络参数修改量过小,收敛缓慢;若选得太大,虽可加快学习速度,但可能导致在稳定点附近的持续振荡,难以收敛。β 的引入可以滤除学习过程中的高频振荡,使学习率可以取得较大值,从而加快网络的学习。目前理论上还没有明确的确定学习率的方法,对于具体问题应取各种 η、β 组合比较实验。通过对比实验,发现选取 $\eta = 0.015$, $\beta = 0.8$ 比较合适。

4.模糊神经网络预测赤潮藻类浓度

实测值与模糊神经网络的预测结果如图7-13所示。

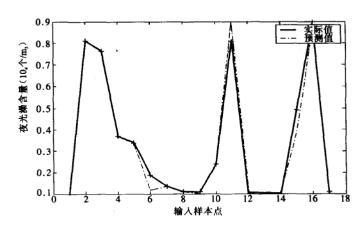


图7-13 实测值和模糊神经网络输出比较

图中的"+"表示模糊神经网络的17个样本值。3个预测值的结果比较见表7-16。

表7-16 实测值与预测值结果比较

样本	实际测得值	BP神经网络	RBF神经网络	FNN模糊神经网络
6	0.188 79	0.117 12	0.168 79	0.188 77
14	0.101 56	0.101 63	0.101 38	0.101 59
15	0.491 09	0.489 38	0.489 94	0.491 34

由以上结果可知模糊神经网络的预测精度较高,而且比BP、RBF网络的拟合结果都精确。

7.3　基于支持向量机的海水富营养化评价与浮游植物密度预测

近年来人工神经网络方法被广泛应用于海水水质富营养化评价以及赤潮藻类密度和浮游植物密度预测研究中。但是人工神经网络建立的数学模型存在两个主要问题：①若训练样本不足，则会造成计算精度不够；②网络结构选择麻烦，或由于神经网络结构太大而出现收敛速度慢、局部极小点和过拟合现象。这样建立的模型就无法保证其具有较好的泛化能力和预测能力。支持向量机是20世纪90年代初期Vapnik等人根据统计学理论提出的一种新的通用的机器学习方法，它是建立在统计学理论中的VC维理论和结构风险最小原理(Structural Risk Minimization Inductive Principle)基础上的，能较好地解决小样本、非线性、高维数和局部极小点等实际问题，能有效地避免"过拟和"，已成为机器学习界的研究热点之一，并已成功地应用于分类、函数逼近和时间序列预测等方面。有鉴于此，本节将采用SVM的分类和回归方法建立海水水质富营养化评价模型和赤潮(藻类及浮游植物密度)预测模型。

7.3.1　支持向量机的工作原理

为了解释支持向量机是如何工作的，从线性可分模式的情况开始是最容易的，这里的可分模式是在模式分类的背景中出现的。在该背景中，支持向量机的主要思想就是通过最大化正负样本之间的分类间隔来构造一个超平面作为分类面。这一学习机器通过遵循统计学习理论的方法，来达到想要得到的性质。更精确地说，支持向量机是结构风险最小化方法的近似实现。

1.线性支持向量机

支持向量机的理论最初来自于对数据分类问题的处理。对于线性可分数据的二值分类，如果采用其他网络来实现，其机理可以简单描述为：系统随机地产生一个超平面并移动它，直到训练集合中属于不同类别的点正好位于该超平面的不同侧面，就完成了对网络的设计要求。但是这种机理决定了其最终获得的分割平面将相当靠近训练集合中的点。而在绝大多数情况下，这显然不是一个最优解。

而支持向量机方法很巧妙地解决了这一问题。该方法的机理可以简单描述为：寻找一个满足分类要求的最优分类超平面，使得该超平面在保证分类精度的同时，最大化超平面两侧的空白区域。从理论上来说，支持向量机能够实现对线性可分数据的最优分类。

具体来说，从最简单的情况开始：考虑图7-14所示的二维两类线性可分情况，图中圆点和方点分别表示两类的训练样本，H 为把两类没有错误地分开的分类线，H_1 和 H_2 分别为过各类样本中离分类线最近的点且平行于分类线的直线，那么 H_1 和 H_2 之间的距离即两类的分类间隔(Margin)。所谓最优分类线就是要求分类线不但能将两类无错误地分开，而且要使两类的分类间隔最大。前者是保证经验风险最小(为0)，后者实际上是为了使置信范围最小，从而使实际风险最小，这是对结构风险最小化原则的具体实现。推广到高维空间，最优分类线就成为最优超平面(Optimal Hyperplane)。这可以用公式化形式表示如下。

假定训练数据$(\boldsymbol{x}_i, y_i)$，$i=1,2,\cdots,l$，$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，$y\in\{+1,-1\}$，可以被超平面 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}+b=0$ 分开，其中 $\boldsymbol{\omega}\in\mathbf{R}^n$。为使超平面对所有样本正确分类，就要求它满意如下约束：

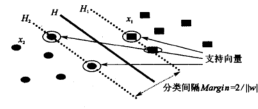


图 7-14　最优超平面示意图

$$y_i(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}_i+b)-1\geqslant 0 \tag{7-24}$$

由于分类间隔等于 $2/\|\boldsymbol{\omega}\|$，于是可以在服从约束式(7-24)的条件下利用最小化 $\|\boldsymbol{\omega}\|^2$ 的方法来最大化分类间隔。因此，求解最优超平面问题就可以表示成如下的约束优化问题，即在条件式(7-24)的约束下，求函数

$$\Phi(\boldsymbol{\omega})=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\omega}\|^2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\omega}) \tag{7-25}$$

的最小值。

支持向量(support vectors)就是使式(7-24)中的等号成立的那些样本，如图 7-14 中用圆圈标出的点所示。对这些学习机器来说，支持向量是训练集中的关键元素，它们离决策边界最近。如果去掉所有其他训练点(或者移动位置，但是不穿越 H_1 或 H_2)，再重新进行训练，得到的分类面是相同的。在下面的求解过程中可以看到，正是支持向量而不是其他的样本点对最优超平面的求解有着至关重要的作用。

为求解最优超平面，定义如下的 Lagrange 函数：

$$L=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\omega}\|^2-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i y_i(\boldsymbol{x}_i{}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\omega}+b)+\sum_{i=1}^{l}\alpha_i \tag{7-26}$$

其中，$\alpha_i>0$ 为 Lagrange 系数。现在的问题是关于 $\boldsymbol{\omega}$ 和 b 对 L 求最小值。这就意味着可以先对等地解决一个较为简单的"对偶"问题，即求 L 的最大值。其约束条件为 L 关于 ω 和 b 的梯度均为 0 以及 $\alpha_i\geqslant 0$。即需要在约束条件

$$\sum_{i=1}^{l}y_i\alpha_i=0\quad(\alpha_i\geqslant 0;i=1,\cdots,l) \tag{7-27}$$

下对 α_i 求解下列函数的最大值：

$$W(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\alpha_i\alpha_j y_i y_j(\boldsymbol{x}_i{}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}_j) \tag{7-28}$$

如果 α_j^* 为最优解，那么

$$\boldsymbol{\omega}^*=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i^* y_i\boldsymbol{x}_i \tag{7-29}$$

即最优超平面的权系数向量是训练样本向量的线性组合。

这是一个不等式约束下的二次函数极值问题，存在唯一解，而且根据 Kuhn-Tucker 条件，这个优化问题的解必须满足：

$$\alpha_i\{[(\boldsymbol{x}_i{}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\omega})-b]y_i-1\}=0\quad(i=1,\cdots,l) \tag{7-30}$$

因此，对多数样本 α_i 将为零，取值不为零的 α_i 对应于使式(7-26)中的等号成立的样本，即支持向量，它们通常只是全体样本中很少的一部分。

求解上述问题后得到的最优分类函数是

$$f(x)=\mathrm{sgn}\{\sum_{i=1}^{l}y_i\alpha_i^*(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x})+b^*\}\tag{7-31}$$

由于非支持向量对应的 α_i 均为 0,因此上式的求和实际上只对支持向量进行。b^* 是分类的阈值,可以由任意一个支持向量用式(7-26)求得,或通过两类中任意一对支持向量取中值求得。

在线性可分情况下,在条件式(7-26)中增加一个松弛项 $\zeta\geqslant 0$,于是成为

$$y_i[(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}_i)+b]\geqslant 1-\zeta_i\quad(i=1,\cdots,l)\tag{7-32}$$

因此,目标就是在式(7-32)约束条件下求下列函数的极小值:

$$\Phi(\boldsymbol{\omega},\zeta)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\omega})+C(\sum_{i=1}^{l}\xi_i)\tag{7-33}$$

即折中考虑最少错分样本和最大分类间隔,就得到了线性不可分情况下的最优超平面,称作广义最优超平面。其中 $C>0$ 为某个指定的常数,它控制对错分样本的惩罚程度。线性可分模式的最优化问题是作为一种特殊的情形包含在刚才所述的不可分模式的最优化问题中。特别地,在式(7-32)和式(7-33)中,对所有 i 令 $\zeta_i=0$,即可得到相应的线性可分模式时的形式。不可分模式和可分模式的差别就在于:可分模式中的约束条件 $\alpha_i\geqslant 0$;在不可分模式中,换为更严格的条件 $0\leqslant\alpha_i\leqslant C$。除了这一修正,不可分模式的约束最优化问题以及权值向量 $\boldsymbol{\omega}$ 和偏差 b 的最优值的计算都和线性可分模式中的过程是相同的。

2.非线性支持向量机

在输入空间中构造最优分类面的方法类似于经典的感知器(单个神经元)方法。这种方法仅当样本集为线性可分时才能使经验误差等于零。由于许多问题都不是线性可分的,因此用这种方法求得的解常常由于经验误差过大而失去意义,

解决这个问题的第一个途径是多层感知器,其实质就是将近似函数集由简单线性指示函数扩展成由许多线性指示函数叠加成的一个更为复杂的近似函数集,再用 S 型函数来近似指示函数中的单位阶跃函数(或符号函数),从而得到使经验误差极小化的一种容易操作的算法。但是,这种方法存在着容易陷入局部极小点、网络结构设计依赖于先验知识、由于缺乏理论基础从而难以控制以及泛化能力较差这些问题。

第二个途径是将输入向量映射到一个高维的特征向量空间,并在该特征空间中构造最优分类面,这就是支持向量机方法。它能够避免在多层前向网络中无法克服的上述问题,并且经证明,如果选用适当的映射函数,大多数输入空间线性不可分的问题在特征空间可以化为线性可分问题来解决。

由于在低维输入空间向高维特征空间映射过程中,空间维数急速增长,这就使得在大多数情况下难以直接在特征空间计算最佳分类平面。支持向量机通过定义核函数(kernel function),巧妙地将这一问题转化到输入空间进行计算。其具体机理如下。

可以注意到在上面的问题求解中都只涉及内积运算,因此假设有非线性映射 $\Phi:\mathbf{R}^n\rightarrow H$,将输入空间的样本映射到高维特征空间 H 中,当在特征空间中构造最优超平面时,训练算法仅使用特征空间中的点积,即 $\Phi(\boldsymbol{x}_i)^{\mathrm{T}}\cdot\Phi(\boldsymbol{x}_j)$。所以,若能找到一个函数 K 且使 $K(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)=\Phi(\boldsymbol{x}_i)^{\mathrm{T}}\cdot\Phi(\boldsymbol{x}_j)$,这样,在高维空间中实际上只需进行内积运算,甚至不必知道变换的形式。

根据泛函的有关理论,只要一种函数 $K(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)$ 满足 Mercer 条件,它就对应某一变换空间

中的内积。因此，在最优分类面中，采用满足 Mercer 条件的内积函数 $K(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)$ 就可以实现某一非线性变换后的线性分类，而计算复杂度却没有增加，此时的决策函数就变为

$$f(x)=\operatorname{sgn}\left\{\sum_{i=1}^{l} y_i\alpha_i^* K(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x})+b^*\right\} \tag{7-34}$$

算法的其他条件均不变。由于最终的判别函数中实际只包含支持向量的内积以及求和，因此识别时的计算复杂度取决于支持向量的个数。

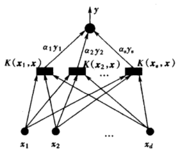


图 7-15 支持向量机示意图

由图 7-15 可以看出，支持向量机求得的决策函数形式上类似于一个神经网络，其输出是若干中间层节点的线性组合，而每一个中间层节点对应于输入样本与一个支持向量的内积，因此也被称作支持向量网络。在式(7-34)中，满足 Mercer 条件的内积函数 $K(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x})$ 称为核函数。下面给出一个具体的核函数的例子。

如图 7-16(a)所示，数据样本 $\boldsymbol{x}_i\in\mathbf{R}^2(i=1,\cdots,l)$，选择核函数 $K(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x})$ 为多项式核函数 $K(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)=(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)^2$，那么目的是寻找一个满足如下条件的空间 H 和映射 Φ：使映射 Φ 将数据从 $\mathbf{R}^2$ 空间映射到 H 空间，并且满足 $(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{y})^2=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\cdot\Phi(\boldsymbol{y})$。满足该条件的空间 H 和映射 Φ 是很容易找到的，当 $H=\mathbf{R}^3$ 以及 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})=(x_1^2,\sqrt{2}x_1x_2,x_2^2)^{\mathrm{T}}$ 时即可满足以上条件。对于一个特定的核函数，映射和特征空间的选择并不是唯一的。

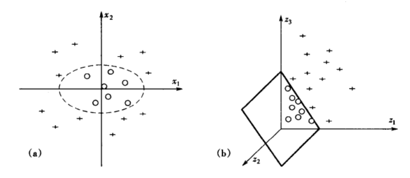


图 7-16 支持向量机用于二维样本分类

(a)二维空间；(b)三维空间

图 7-16 表示了上述对二维样本进行分类，用二阶多项式作为映射函数的变换过程。在图 7-16(a)中，原始二维空间中必须要用一个椭圆形的非线性分类器才能分开，而通过二阶多项式变换将数据映射到三维特征空间中。在图 7-16(b)中，可以看出两类数据用一个线性的分类面就可以分开。

3. 核函数

不同的核函数可以构造实现输入空间中不同类型的非线性决策面的学习机器，常用的核函数如下。

①多项式核函数(d 阶)

$$K(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)=(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}_j)^d$$

$d=1$ 时为线性核函数。

②径向基函数(RBF 高斯核函数)

$$K(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)=\exp\{-\gamma\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j\|^2\}$$

其中 $\gamma>0$ 且 $\gamma=1/\sigma^2$。

所得的分类器与神经网络 RBF 算法根本的区别是:每个径向基函数的中心对应一个支持向量,网络结构及其网络权值由算法自动确定。

③多层感知机(sigmoid 函数)

$$K(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)=\tan(\upsilon(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}_j)+d)$$

这时的 SVM 算法中包含了一个隐层的多层感知器,隐层节点数是由算法自动确定的,而且算法不存在困扰神经网络的局部极小点的问题。

核函数的参数应当仔细选取,它和误差惩罚因子 C 是影响 SVM 性能的主要因素。从上面的讨论可以看出,具体应用 SVM 的步骤为:先选择适当的核函数,再求解优化方程,获得支持向量和相应的拉格朗日算子,最后写出最优分解面。

4. 支持向量机回归原理及算法实现

SVM 用来估计回归函数时,有 3 个特点:

①利用在高维空间中定义的线性函数集来估计回归;

②利用线性最小化来实现回归估计,风险是用 Vapnik 的 ε 不敏感损失函数来度量的;

③采用的风险函数是由经验误差和一个由结构风险最小化原则导出的正则化部分组成的。

给定一个数据集 $H=\{(\boldsymbol{x}_i,y_i)\},i=1,2,\cdots,n$,其中 $\boldsymbol{x}_i$ 是输入向量,y_i 是期望值,n 是数据点的总数。估计函数如下:

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\omega}\varphi(\boldsymbol{x})+b \tag{7-35}$$

其中,$\varphi(\boldsymbol{x})$是从输入空间到高维特征空间的非线性映射,系数 ω 由以下最小化式(7-36)来估计:

$$R_{reg}[f]=R_{emp}[f]+\lambda\|\boldsymbol{\omega}\|^2=\sum_{i=1}^{n}C(f(\boldsymbol{x}_i)-y_i)+\lambda\|\boldsymbol{\omega}\|^2 \tag{7-36}$$

$$C(f(\boldsymbol{x}_i)-y_i)=\begin{cases}|f(\boldsymbol{x})-y|-\varepsilon & (|f(\boldsymbol{x})-y|\geqslant\varepsilon)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases} \tag{7-37}$$

在式(7-36)给出的正则化风险泛函中,$R_{emp}[f]$是经验风险,它由式(7-37)给出的 ε 不敏感损失函数来度量。损失函数的用途在于它能够用稀疏数据点来表现由式(7-35)给出的决策函数。C 是正常数,它决定着经验风险和正则化部分之间的平衡。第二部分 $\lambda\|\boldsymbol{\omega}\|^2$ 是正则化部分。

为了寻找 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{b}$,需要引入松弛变量 ζ_i 和 ζ_i^*,使式(7-38)最小化,式(7-39)为约束条件:

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\omega}\|^2+c\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i+\zeta_i^*) \tag{7-38}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\varphi(\boldsymbol{x}_i)+b_i-y_i\leqslant\varepsilon+\zeta_i^*,\zeta_i^*\geqslant0\\ y_i-\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\varphi(\boldsymbol{x}_i)-b_i\leqslant\varepsilon+\zeta_i^*,\zeta_i^*\geqslant0\end{aligned}\right\} \tag{7-39}$$

最后,通过引入拉格朗日算子,由式(7-35)给出的决策函数就变成下面的精确形式:

$$f(\boldsymbol{x},a_i,a_i^*)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_i^*)K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)+b \tag{7-40}$$

要找到所求的向量 $\boldsymbol{\omega}=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_i^*)\boldsymbol{x}_i$，必须找到最小化二次型

$$L(a_i-a_i^*)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_i^*-a)(\sum_{i=1}^{n}(a_j^*-a_j)K(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)) - \sum_{i=1}^{n}a_i^*(y_i-\varepsilon)-a_i(y_i+\varepsilon) \tag{7-41}$$

的参数 a_i 和 a_i^*，$i=1,2,\cdots,n$，其约束条件是 $\sum_{i=1}^{n}a_i^*=\sum_{i=1}^{n}a_i$，且 a_i、$a_i^*\in[0,c]$。

在式(7-40)中，$(a_i-a_i^*)$的非零值对应的数据点就是支持向量，一般来说，ε 值越大，支持向量数目就越少，因而解更稀疏。利用以上约束条件可以解出参数 b。

7.3.2 基于 SVM 的海水富营养化评价

水体富营养化程度的评价方法是现代环境科学基础理论研究的重要课题。富营养化评价是个典型的模式识别问题，影响水质的因素很多，评价指标与水质标准等级之间是复杂的非线性关系。

利用支持向量机方法进行海水富营养化程度评价，首先要确定影响海水富营养化的主要影响因素，其次选择样本数据集，然后利用 SVM 进行学习训练，最后根据训练后获得的模型进行计算，得到评价值。

天然水体中，藻类利用光和 CO_2 合成本身原生质的基本反应式如下：

$$106CO_2+16NO_3^-+HPO_4^{2-}+122H_2O+18H^+ + \text{能量}+\text{微量元素}\rightarrow$$
$$C_{106}H_{263}O_{110}N_{16}P_1(\text{浮游植物})+138O_2$$

从上式可以看出，光合作用的限制性因素主要为氮、磷营养盐，藻类的繁殖使水体中的有机物、叶绿素和藻类细胞浓度增加。因此，选择 COD、无机氮、无机磷、叶绿素 α 浓度和浮游植物(Phytoplankton)细胞丰度 5 种指标作为海水富营养化的评价指标。根据海水质量标准和研究成果，制定如下评价标准(见表 7-17)。

表 7-17 海水水质评价标准

评价指标	Ⅰ贫营养	Ⅱ中营养	Ⅲ富营养
COD(mg/L)	1	2	3
PO_4-P(mg/L)	0.01	0.03	0.045
TN(mg/L)	0.1	0.2	0.3
Chl - α(mg/m^3)	2	5	10
Phytoplankton(10^4个$/m^3$)	25	50	150

为了保证足够的精度，需要将分级标准插值加密。这里用线性插值的方法将分级标准加密 1 倍，即分成更小的级别。将水质富营养化程度 3 个等级的评价标准作为支持向量机的“学习”教材，将模型的输出值[0,1]区间也进行划分，分别对应水质的 3 个级别，这样就可以得到与模型输出相对应的分级评价标准(见表 7-18)。

表 7-18　评价模型使用的水质分级标准

水质级别	I 贫营养	II 中营养	III 富营养
数据区间	0 ~ 0.333	0.333 ~ 0.666	0.666 ~ 1.000

将线性插值得到的分级标准写成矩阵形式，于是得到训练矩阵

$$X_{5\times 7}=\begin{bmatrix}0 & 0.500\,0 & 1.000\,0 & 1.500\,0 & 2.000\,0 & 2.500\,0 & 3.000\,0\\ 0 & 0.005\,0 & 0.010\,0 & 0.020\,0 & 0.030\,0 & 0.035\,7 & 0.045\,0\\ 0 & 0.050\,0 & 0.100\,0 & 0.150\,0 & 0.200\,0 & 0.250\,0 & 0.300\,0\\ 0 & 1.000\,0 & 2.000\,0 & 3.500\,0 & 5.000\,0 & 7.500\,0 & 10.000\,0\\ 0 & 12.500\,0 & 25.000\,0 & 37.500\,0 & 50.000\,0 & 100.000\,0 & 150.000\,0\end{bmatrix}$$

相应的期望输出矩阵

$$Y_{1\times 7}=[0\quad 0.166\,5\quad 0.333\,0\quad 0.499\,5\quad 0.666\,0\quad 0.833\,0\quad 1.000\,0]$$

利用 Matlab 软件分别编制 SVM 和神经网络（ANN）算法，ANN 采用多层前馈网络模型，SVM 算法的结构示意图如图 7-15 所示，ANN 网络训练收敛情况如图 7-17 所示。

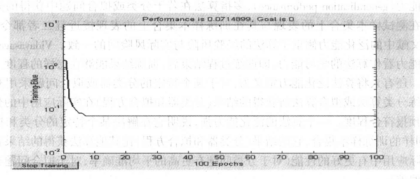


图 7-17　人工神经网络训练过程中网络收敛情况

某海域不同站位的水质实测数据的矩阵

$$Z_{5\times 12}=\begin{bmatrix}1.65 & 2.01 & 1.96 & 1.66 & 1.56 & 1.39 & 1.42 & 1.35 & 0.98 & 1.28 & 1.06 & 1.17\\ 0.031 & 0.06 & 0.033 & 0.060 & 0.052 & 0.012 & 0.025 & 0.007 & 0.017 & 0.007 & 0.014 & 0.01\\ 0.472 & 0.735 & 0.509 & 0.771 & 0.794 & 0.258 & 0.458 & 0.152 & 0.164 & 0.146 & 0.131 & 0.281\\ 7.37 & 4.63 & 4.65 & 5.43 & 3.82 & 5.96 & 4.84 & 7.74 & 2.42 & 6.87 & 7.25 & 7.57\\ 262.06 & 5.25 & 197.50 & 11.91 & 27.57 & 21.51 & 11.36 & 111.57 & 82.34 & 87.71 & 107.16 & 388.17\end{bmatrix}$$

将 $X_{5\times 7}$、$Y_{1\times 7}$、$Z_{5\times 1}$ 分别标准化，然后输入到编写的 SVM 和 ANN 程序中，两种方法所得的计算结果如表 7-19 所示。可以看出站位测点 1、2、3、4、5、7、9、12 基本一致。测点 6、8、10、11 的 SVM 评价结果为 II 级，而神经网络评价结果为 III 级，实际上这 4 个测点水质的 5 项指标中均有 3 项指标未超过 III 级，所以 SVM 方法将上述站位测点水质评为 II 级更为合理。从评价结果来看，利用 SVM 方法建立的评价模型，能充分利用训练样本的分布特性，评价结果与实际情况更为相符，为海水富营养化评价及其他环境质量评价工作提供了一种新的有效的方法。

表 7-19 某海域水质评价结果

站位	COD (mg/L)	PO - P (mg/L)	TN (mg/L)	Chl - α (mg/m³)	Phytoplankton (10^4 个/m³)	神经网络计算结果	SVM计算结果	高营养化等级
1	1.65	0.031	0.472	7.37	262.06	0.833 0	0.803 084 0	Ⅲ高营养
2	2.01	0.060	0.735	4.63	5.25	0.572 3	0.552 631 6	Ⅱ中营养
3	1.96	0.033	0.509	4.65	197.50	0.833 0	0.823 220 1	Ⅲ高营养
4	1.66	0.060	0.771	5.43	11.91	0.567 7	0.552 022 0	Ⅱ中营养
5	1.56	0.052	0.794	3.82	27.57	0.563 0	0.551 772 3	Ⅱ中营养
6	1.39	0.012	0.258	5.96	21.51	0.832 6	0.551 173 7	Ⅱ中营养
7	1.42	0.025	0.458	4.84	11.36	0.542 6	0.577 882 5	Ⅱ中营养
8	1.35	0.007	0.152	7.74	111.57	0.833 0	0.580 519 1	Ⅱ中营养
9	0.98	0.017	0.164	2.42	82.34	0.532 9	0.489 717 1	Ⅱ中营养
10	1.28	0.007	0.146	6.87	87.71	0.833 0	0.543 583 0	Ⅱ中营养
11	1.06	0.014	0.131	7.25	107.16	0.833 0	0.569 936 3	Ⅱ中营养
12	1.17	0.010	0.218	7.57	388.17	0.833 0	0.832 319 7	Ⅲ高营养

泛化能力(generalization performance),多指算法在若干分类或拟合问题中获得的分类器或拟合方程在测试样本集合上的表现与其在训练样本集合上的表现接近且二者都令人满意。Vapnik 的文献中的泛化能力侧重于算法的经验风险与实际风险间的一致。Vidayasagar 的文献中将泛化能力看作算法的学习能力,即训练过程结束后,训练结果能够在怎样的程度上解决待学习问题。还有人将算法泛化能力定义为:对于某个特定的分类器或拟合问题采用有限的已知样本训练分类算法或拟合算法所获得的结果(分类器和拟合方程)在实际应用中的分类准确率或数值预报符合程度。一个算法的泛化能力强,说明它在解决某个特定的分类和拟合问题时,采用同样的训练样本集合,它的结果(分类器和拟合方程)比其他算法获得的结果在测试数据上或实际应用中有更好的性能(对于分类问题有更高的平均准确率,对于拟合问题有更小的数值预报偏差)。

海水的富营养化评价是个典型的模式识别问题,影响水质的因素很多,评价指标与水质标准等级之间是复杂的非线性关系,支持向量机理论能成功应用于海水的富营养化评价。运用支持向量机理论评价海水水质的富营养化程度,只需把相应的实际观测数据提供给程序,利用计算机分析计算就可获得评价结果,因而与传统评价方法相比,该方法计算简便、快捷、精度高,具有较大的实用性。而且评价结果具有客观性,避免了模糊综合评价和灰色聚类等方法权重赋值和隶属函数确定中的人为因素的影响,减少了评价过程中的人为主观因素。与人工神经网络评价方法相比,支持向量机能充分利用训练样本的分布特性,解决了样本数据不足带来的问题;能根据部分训练样本构建判别函数,不需要过多的先验信息和使用技巧;还能根据有限的样本信息在模型的复杂性和学习能力之间寻求最佳折中,保证其有较好的泛化性能。

7.3.3 基于 SVM 的浮游植物密度预测

赤潮是一种常见的海洋污染现象,引发赤潮的机理相当复杂。当海洋的物理化学环境适合于藻类暴发性繁殖时,即能产生赤潮。通过对平时和赤潮发生时的海洋化学数据的挖掘,查明多种因素对赤潮发生的对应关系,有助于建立赤潮发生的数学模型,了解赤潮发生的机理,

为赤潮预报提供有用信息。前人曾用线性回归和人工神经网络等算法考察环境因素和赤潮暴发的对应关系，实际效果不佳。因赤潮暴发并非线性过程，用线性回归建模难免造成偏差。人工神经网络在训练样本不是很多时容易产生过拟合，由此建立的模型在预报时也可能造成失误。近年来，以数学家 Vapnik 为代表的学者经过多年研究，发展了一套“统计学习理论”和以它为基础的“支持向量机”算法。其中包括“支持向量分类”(Support Vector Classification，简称 SVC)和“支持向量回归”(Support Vector Regression，简称 SVR)。这套新算法既能处理非线性数据，又能有效地限制过拟合，在文字识别、语音识别等方面已卓有成效。有鉴于此，这里尝试用 SVC 和 SVR 算法对浮游植物密度与环境条件的关系建立数学模型。

1.计算样本的构建及数据的预处理

仍然根据蔡如钰 1997 年的调查数据(表 7-1)，共计 17 个样本，浮游植物和夜光藻的监测按《海洋调查规范》(国家海洋局，1975)进行，水文、理化因子的采样及分析按《海洋污染调查暂行规范》(国家海洋局 1979)执行。各种理化因子有水温(T)、溶解氧(DO)、盐度(S)、总氮(N)、可溶性无机磷(P)、浮游植物密度(F)等。

为了对原始数据中的冗余信息进行处理，提取所有有用信息，首先要对数据进行平滑处理(剔除奇异值)。为了将属性数据规范化，使之落入一个小的特定的区域[0,1]，要对原始数据进行归一化处理(防止计算溢出)，对样本的输入和输出参数分别用下式进行归一化处理：

$$y_i = \frac{z_i - z_{\min}}{z_{\max} - z_{\min}}$$

式中，z_i 和 y_i 分别为归一化前后的变量；$z_{\min}$ 和 $z_{\max}$ 分别为 z 的最小和最大值。将数据分成训练和预测两部分(前 14 组数据用于训练，后 3 组数据样本用于预测效果检验)。

2.基于 SVM 的浮游植物密度预测步骤

赤潮藻类密度的预测是一个多变量预测问题，它可被看成函数回归问题。浮游植物(藻类)密度 y 为函数的输出值，而相应的影响浮游植物密度的因素如：水温(T)、溶解氧(DO)、盐度(S)、总氮(N)、可溶性无机磷(P)等作为函数输入值 x。问题的最终目的是寻找一个有良好推广能力的从影响浮游植物密度的海水理化因素到浮游植物密度的映射，其基于 SVM 的浮游植物密度预测的步骤为：

①对数据进行平滑处理(剔除奇异值)和归一化处理(防止计算溢出)，然后形成样本集；

②用训练样本建立目标函数；

③利用序列极小化(Sequential Minimum Optimization，简称 SMO)算法求解目标函数(二次型)；

④将求解目标函数所得的参数 a_i 和 a_i^* 代入式(7-40)，将得到的拉格朗日算子代入预测函数中，并利用样本对未来某一时刻的浮游植物密度进行预测。

基于 SVM 方法进行浮游植物密度预测程序的逻辑框图如图 7-18 所示。

3.核函数的选择及其参数的确定

使用支持向量回归(SVR)方法预测浮游植物密度，首先要确定 ε 不敏感值、惩罚因子 C，选用核函数及其参数 γ。在这过程中，第一要选择一个模型，即一个核函数。首先，选用线性的核函数，发现效果很不好。这说明数据复杂度比较高，在线性情况下是不可分的。然后确定选用径向(RBF)核函数。不选多项式的原因是模型参数确定比较复杂，同时，经随机选择一些参数测试，其结果也不是令人很满意。

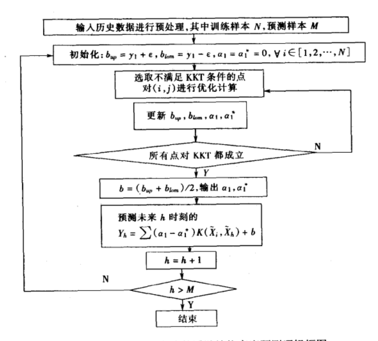


图 7-18　基于 SVM 方法的浮游植物密度预测逻辑框图

注：点对(i,j)表示参数下标为(i,j)的子规划问题

接下来，需要确定模型的参数，即公式 $K(x_i,x_j)=\exp\{-\gamma\|x_i-x_j\|^2\}(\gamma>0)$中的 γ，以及惩罚程度的常数 C。确定参数的过程中用了交叉有效和网格搜索这两个有效的方法。下面简单介绍这两种方法，以及相应的应用过程。

①交叉有效就是将数据首先分成 n 个同样大小的子集，然后用 $n-1$ 个子集作为训练样本，预测那个没有参加训练的子集，就这样一个接一个进行至 n 次。全部数据中的每个样本点都被预测一遍，准确率是比较稳定的。

②网格搜索首先选定一组 C、γ 的范围：$C=2^{-6},2^{-3},\cdots,2^{15}$ 和 $\gamma=2^{-15},2^{-12},\cdots,2^{3}$，然后将它们的准确率用等高线连接起来绘出图形，如图 7-19(a)所示。最后确定准确率出现最高的一段调小步长，再确定一组参数 $C=2^{4},2^{4.5},\cdots,2^{8}$ 和 $\gamma=2^{-10},2^{-9.5},\cdots,2^{-6}$，如图 7-19(b)所示。

反复进行以上步骤，由此，这里选定 $C=100, \gamma=0.01, \varepsilon=0.001$。

4. 基于 SVC 的计算结果分析

对样本分类结果进行评价时，通常采用的方法是留一法(leave-one-out, LOO)和独立检验法。留一法是指每次去除 1 个样本，构建新的分类器，然后对所去除的样本进行分类，统计错误分类的次数。独立检验法将样本分为测试集和训练集，即随机将数据分为 k 个子集合，依次取出一个子集作为测试集，而其余的 $k-1$ 个子集合作为训练集。利用分类器，对测试集的样本分别进行分类，计算错误分类的次数，此过程循环 k 次。

取表 7-1 中样本数据，用支持向量分类(SVC)算法建模，经过前文的讨论，筛选核函数，得知用 $\gamma=3$ 的径向(RBF)核函数 $K(x_i,x_j)=\exp\{-\gamma\|x_i-x_j\|^2\}$时的预报效果最佳。计算表

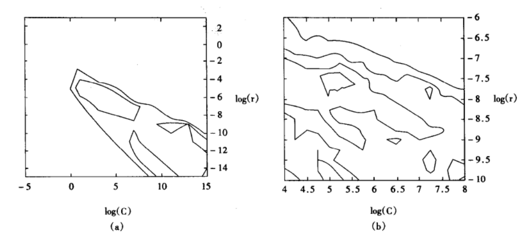


图 7-19　网格参数法粗分图与细分图

(a)粗分图;(b)细分图

明,用 SVC 的留一法预报的误报率为 11.7%。用线性核函数所得分类判据可看出各因素的影响,求得赤潮生成的粗略判据为

$$0.676(t) + 0.731(DO) - 0.615(S) + 1.110(N) - 1.69(P) - 0.249(F) - 0.819 > 0$$

5. 基于 SVR 的计算结果分析

通过对不同的不敏感值 ε、惩罚因子 C 及核参数 γ 的试验,在研究中发现,核参数 γ 和 C 对 SVR 算法的表现起到非常重要的作用,而 ε 却影响支持向量的数目。当把 C 和 ε 分别固定在 100 和 0.001 时,训练的标准均方差随着 γ 的减小而增大;另一方面,测试集的标准均方差随着 γ 的减少而增大。这表明 γ 的值太大(取 1 ~ 10 时)会出现过学习现象,γ 的值太小(取 0.01 ~ 0.000 1 时)会对训练集造成欠学习现象。γ 的取值应当在 0.01 ~ 1 之间,此时训练较稳定。由此可见,γ 对 SVR 的泛化能力起着关键作用。当分别把 γ 和 ε 固定在 0.01 和 0.001 时,训练集的标准均方差随着 C 的增大而单调减小。同时,当 C 的值从 0.1 增大到 10 时,测试集的标准均方差开始逐渐减小;当 C 的值从 10 增大到 200 的时候,测试集的标准均方差几乎保持为一常量;当 C 的值超过 200 的时候,测试集的标准均方差开始增大。其原因在于小的 C 值会对训练数据造成欠学习现象,C 的值太大容易对训练数据造成过学习现象而导致泛化能力恶化,因此 C 的适合值应在 10 ~ 200 之间。当分别把 γ 和 C 固定在 0.01 和 100 时,训练集和测试集的标准均方差都非常稳定,因而不受 ε 值变化的影响。这表明,SVR 的性能对 ε 不敏感,然而,支持向量的数目却随着 ε 的增大而减少。

这里选定 $C = 100, \gamma = 0.01, \varepsilon = 0.001$。所得数学模型结果中 5 个支持向量样本号为 1、2、3、7、13,相应的支持向量系数为 -0.815 0、0.433 8、1.032 2、-1.253 8、0.302 7,回归式中常数 $b = -0.441\ 8$。将前 14 组训练数据样本和后 3 组检验样本输入到经过网络学习的支持向量机中,进行预测效果检验,学习训练和预测的结果如表 7-20 所示,拟合曲线如图 7-20 所示。

表 7-20 SVR 训练结果及预测值与实际数据比较 10^4 个/m^3

样本号	实际数据(浮游植物密度)	训练或预测结果	误差
1	148		
2	146	145.986 461	-0.013 539
3	31.1	31.058 669	-0.041 331
4	32	32.046 362	0.046 362
5	31.8	31.801 675	0.001 675
6	226	225.938 684	-0.061 316
7	9.72	9.759 849	0.039 849
8	148	148.012 786	0.012 786
9	187	186.979 937	-0.020 063
10	10.5	10.590 355	0.090 355
11	160	160.028 788	0.028 788
12	74.5	74.600 026	0.100 026
13	205	204.998 358	-0.001 642
14	109	108.979 764	-0.020 236
15	125	135.006 635(预测)	10.006 635
16	71.5	68.689 974(预测)	-2.810 026
17	147	123.319 474(预测)	-23.680 526

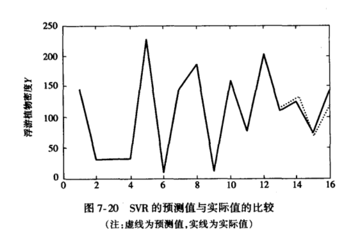


图 7-20 SVR 的预测值与实际值的比较

(注:虚线为预测值,实线为实际值)

SVR 训练结果的平均误差为 0.034×10^4 个/m^3,预测结果平均误差为 12.166×10^4 个/m^3,标准偏差为 14.931×10^4 个/m^3。

6.与人工神经网络方法所得计算结果的比较分析

虽然神经网络与支持向量机在结构上具有一定的相似之处,但它们的优化算法存在着本质的差别。神经网络是以经验风险最小化原则进行优化的,容易产生过度拟合,并且易于陷入局部极小点。支持向量机是以结构风险最小化原则为基础的,这就使得支持向量机具有更好

的泛化能力，并且该算法是一个凸优化问题，因此局部最优解一定是全局最优解。

为了便于比较分析两种预测方法的预测性能，采用以下两个统计量来评价模型的拟合程度和预测效果，这两个统计量是均方根误差 RMSE(标准偏差)和平均绝对误差 MAE(平均误差)。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{x}_i)^2}$$

$$MAE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i - \hat{x}_i|$$

人工神经网络模型的训练结果的平均误差为 0.044×10^4 个/m^3，预测结果的平均误差为 19.182×10^4 个/m^3，标准偏差为 42.074×10^4 个/m^3。

表 7-21　预测模型对比试验结果　(10^4 个/m^3)

误差	支持向量机(SVM)		人工神经网络(ANN)	
	拟和数据	预测数据	拟和数据	预测数据
标准偏差	0.046	14.931	0.086	42.074
平均误差	0.034	12.166	0.044	19.182

从表 7-21 可以看出，无论是拟合能力，还是预测能力，SVM 方法都明显优于 ANN 方法，SVM 方法表现出了较强的泛化(预测)能力。多元回归方法预测能力最低。

在对实际监测数据的仿真试验中，SVM 方法能充分利用训练样本的分布特性，根据部分训练样本构建判别函数，不需要过多的先验信息和使用技巧，并最终转化为二次寻优问题。从理论上说，得到的将是全局最优解，从而有效避免了神经网络易陷入的局部极值、泛化能力低的问题，同时通过非线性变换和核函数巧妙解决了高维数问题，使得其算法复杂度与样本维数无关，加速了训练学习速度。另外，它能根据有限的样本信息在模型的复杂性和学习能力之间寻求最佳折中，保证其有较好的泛化性能。

7.4　知识发现在海洋监测中的应用

Jason Bobbin(2001)认为机器学习所获得的知识能够帮助对生态行为之间的因果关系形成更深入的认识，或者直接描述分类的规则。这方面的研究和应用在国外才刚刚开展，而在国内文献中尚未见到。本章尝试将知识发现中的决策树算法应用于赤潮的预测预警系统研究之中。

7.4.1　知识发现介绍

1.知识发现概述

数据库管理系统和人工智能中机器学习这两种技术的发展和结合，促成了在数据库中发现知识(KDD)这一新技术的诞生。1989 年 8 月，在美国底特律召开的第 11 届国际人工智能联合会议的专题讨论会上，KDD 被首次提出。它是一门交叉性学科，涉及机器学习、模式识别、统计学、智能数据库、知识获取、数据可视化、高性能计算、专家系统等领域，内涵极为广泛，理

论和技术难度很大,从而使针对大型数据库的KDD技术一时还难以满足需要。于是,1995年的(美)计算机学会(ACM)会议提出了数据挖掘(data mining)概念,它形象地把大型数据库看作存放有价值的信息资源的矿藏,通过有效的知识发现技术,从中挖掘和开采出有用的信息。

所谓知识发现,就是从数据集中识别出有效的、新颖的、潜在有用的,以及最终可理解的模型的一个过程。也有一些文献把数据挖掘称为知识抽取(knowledge extraction)、数据考古学(data archaeology)、数据捕捞(data dredging)等等。多数人认为数据挖掘是KDD过程中的关键步骤,从而不加区分地使用知识发现和数据挖掘这两个术语。相对来讲,数据挖掘主要流行于统计界(最早出现于统计文献中)、数据分析、数据库和管理信息系统界;而知识发现则主要流行于人工智能和机器学习界。

知识发现与传统数据分析工具的主要区别在于它们探索数据关系时所用的方法不同。传统数据分析工具使用基于验证的方法,即用户首先对特定的数据关系作出假设,然后使用分析工具去确认或否定这些假设。这种方法的有效性受到许多因素的限制,如提出的问题和预先假设是否合适等。与分析工具相反,知识发现使用基于发现的方法,运用模式匹配和其他算法决定数据之间的重要联系。

2.知识发现的处理过程及系统结构

知识发现是一个复杂的处理过程,其中涉及多个处理步骤。Usama Fayyad等人定义了一个知识发现处理模型,如图7-21所示,一般情况下包括以下几个处理步骤。

(1)了解应用的领域

了解知识发现相关领域的有关情况,熟悉有关的背景知识,并明确用户需求。

(2)抽取目标数据集

选择值得关注的数据集或子集。

(3)数据的清理与预处理

数据的清理与预处理包括一些基本的操作,如消除噪声及处理空值。来自现实世界的数据由于各种原因,通常无法保证数据的完整性和一致性,因此在数据挖掘前需要对数据进行清理。

(4)数据合并

数据合并包括合并不同类型、不同来源的数据源。

(5)数据缩减

根据知识发现的任务目标,寻找有用的特性来表示经过预处理的数据,对数据进行降维、转化等再处理,通过投影或数据库中的其他操作减少数据量及需要考虑的变量的个数。

(6)确定数据挖掘的功能

明确由数据挖掘算法产生的模型的目的(如归纳、分类、回归、聚类、关联规则,或它们的组合)。

(7)选择数据挖掘的算法

选择发现数据中模式的方法,包括选取合适的模型和参数。

(8)数据挖掘

利用选定的数据挖掘算法,从数据中提取出用户感兴趣的知识。

(9)解释和评价

对发现的模式进行解释,剔除冗余、无关的知识,对发现的知识进行检验评价,将这些知识

转变为用户可以理解的形式。

(10)使用发现的知识

将知识合并成可操作的系统，并基于这些知识采取相应的措施。

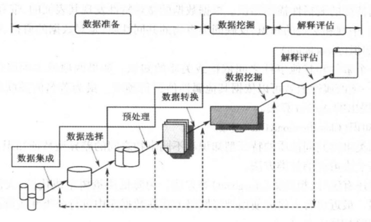


图 7-21　知识发现处理模型

3.知识发现的任务

一般地，把知识表示成规则形式。按照知识发现技术所能够发现的规则，将常见的知识发现任务分为以下几种类型。

(1)特征规则发现

特征规则是一个断言，它把所有数据满足的概念特征化。特征规则发现能够总结并发现由用户指定的数据集的一般特征，如特定疾病的症状等。

(2)辨识规则发现

辨识规则是把一个数据集(目标类)与另一个数据集(对比类)区分开来的特性或性质。例如，为了把一种疾病与另一种疾病区分开来，辨识规则总结区分这些疾病的症状。

(3)互联(关联)规则发现

互联规则描述对象集之间的关联关系，例如，对$\{A_i\}_{i=1}^m$和$\{B_j\}_{j=1}^n$，可能有形式 $A_1 \wedge A_2 \cdots A_m \rightarrow B_1 \wedge B_2 \cdots B_n$ 的规则。

(4)分类规则发现

把被分类数据映射到一组已知的类。

(5)数据聚类

根据对象属性标识对象集的聚类(类或组)。对象按某种聚类准则聚类后，对象组内的相异性最小，组间的相异性最大。

(6)预测

预测某些被丢失数据的可能值或数据集中某些属性值的分布。

(7)趋势性规则发现

发现反映数据集中普遍行为的规则集。

当然，上述几种规则仅仅是目前已知的规则知识中的一部分，尚有其他一些规则这里未列出，例如量化规则等。

4.知识发现结果的分类

知识发现的结果最常见的有以下几类。

(1)广义知识(Generalization)

它指类别特征的概括性描述知识。根据数据的微观特性发现其表征的、带有普遍性的、较高层次概念的、中观和宏观的知识,反映同类事物的共同性质,是对数据的概括、精炼和抽象。

(2)关联知识(Association)

它反映一个事件和其他事件之间依赖或关联的知识。如果两项或多项属性之间存在关联,那么其中一项的属性值就可以依据其他属性值进行预测。最为著名的关联规则发现方法是 R. Agrawal 提出的 Apriori 算法。

(3)分类知识(Classification&Clustering)

它反映同类事物共同性质的特征型知识和不同事物之间的差异型特征知识。最为典型的分类方法是基于决策树的分类方法。

数据分类还有统计、粗糙集(RoughSet)等方法。为降低决策树生成代价,人们还提出了一种区间分类器。最近也有人研究使用神经网络方法在数据库中进行分类和规则提取。

(4)预测型知识(Prediction)

它根据时间序列型数据,由历史的和当前的数据去推测未来的数据,也可以认为是以时间为关键属性的关联知识。目前,时间序列预测方法有经典的统计方法、神经网络和机器学习等。1968 年 Box 和 Jenkins 提出了一套比较完善的时间序列建模理论和分析方法,这些经典的数学方法通过建立随机模型,如自回归模型、自回归滑动平均模型、求和自回归滑动平均模型和季节调整模型等,进行时间序列的预测。

(5)偏差型知识(Deviation)

它是对差异和极端特例的描述,揭示事物偏离常规的异常现象,如标准类外的特例、数据聚类外的离群值等。所有这些知识都可以在不同的概念层次上被发现,并随着概念层次的提升,从微观到中观、到宏观,以满足不同用户不同层次决策的需要。

5.知识发现的常用技术

知识发现是人工智能与数据库技术相结合的产物,人们在统计学、集合论、逻辑学、信息论、认知论、人工智能等学科理论的基础上,提出了各种各样的知识发现的方法和技术,并且形成了各自的特点和应用领域。对于不同的系统知识发现需要采用不同的技术方法和手段,大致可归纳为下列几种类型。

(1)基于传统数理统计等数学工具的方法

应用数学工具或专业知识进行相关分析、回归分析及因子分析等。如在应用系统中对模型的分析从简单的趋向分析发展为基于高深数学的分形理论等。

(2)人工神经网络(ANN)

神经元网络(NN)技术是属于软计算(soft computing)领域内的一种重要方法。在 DM (KDD)的应用方面,当需要从复杂或不精确数据中导出概念和确定趋向比较困难时,利用 NN 技术特别有效。经过训练后的 NN 可以被想像成具有某种专门知识的"专家",因此可以像人一样从经验中学习。其缺点是 NN 的知识获取过程是一个"黑箱"系统,受训后的 NN 所代表的预测模型不具有透明性。

(3)决策树(decisiontree)

在知识工程领域,决策树是一种常用的知识表示方法,它将事例逐步划分成不同的类别。由于分类规则比较直观,因而较易于理解,在机器获取领域内已研制出许多实施决策树的有效算法,如 ID3 及其改进算法等。

(4)进化计算(evolutionary computation,缩写为 EC)

进化计算是模仿生物进化的一类计算方法的统称,包括遗传算法(GA)、遗传编程(GP)、进化策略(ES)、进化规划(EP)。它们大多具有以下特点:进化计算是在适应度函数约束下的智能化搜索,在目标函数(适应度函数)驱动下"优胜劣汰",通过多次迭代,逐步逼近目标。由于进化计算一般都采用了交叉、变异等操作,扩大了搜索范围,因此能逼近全局最优解。且其具有框架式的算法结构,一般只要完成编码和适应度函数选择,其余的遗传、交叉、变异等操作都可以自动完成。

(5)基于事例的推理方法(case based reasoning,缩写为 CBR)

该方法的思路非常简单,当预测未来情况或进行正确决策时,系统寻找与现有情况相类似的事例,并选择最佳的相同的解决方案。这种方法能用于很多问题求解,并获得好的结果,其缺点是系统不能生成汇总过去经验的模块或规则,即无继承性。

(6)粗糙集理论(rough set theory)

粗糙集作为集合论的扩展,用于研究不完全和不完整信息描述的智能系统。对粗糙集的研究主要基于分类,它对不精确概念的描述是通过上近似和下近似这两个精确概念来表示的。粗糙集理论可以解决的基本问题有:根据属性值描述对象集;分析属性间(全部或部分的)相关性、属性归纳、确定属性重要性、决策规则生成等等。

7.4.2　知识发现在海洋监测数据中的应用

将上述决策树算法应用于海洋监测数据之中,以从中发现有参考价值的规则。其规则的表述形式如下:

$$\text{if}((x_1\theta v_1)\text{and}(x_2\theta v_2)\text{and}\cdots\text{and}(x_n\theta v_n))\quad \text{then}((y_1\theta\omega_1)\text{and}(y_2\theta\omega_2)\text{and}\cdots\text{and}(y_m\theta\omega_m))$$

其中,x_i、y_i 分别为输入、输出的属性($1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m$);$\omega_j$、$v_i$ 为常数;θ 为关系操作符($\leqslant$,$\geqslant$,$<$,$>$,$\neq$,$=$)。

定义规则的置信度与支持度如下。

设 I 为一组数据项的集合,D 为事务处理集合,$X\rightarrow Y$ 称为一条关联规则,其中 $X\subset I$,$Y\subset I$ 且 $X\cap Y=\varnothing$。如果 D 中 $100C\%$ 的事务既包含 X 又包含 Y,则 C 称为规则 $X\rightarrow Y$ 在事务集 D 中的置信度。如果 D 中 $100S\%$ 的事务包含 $X\cup Y$,则 S 称为规则 $X\rightarrow Y$ 事务集 D 中的支持度。

仍取表 7-1 中的数据。由于第 6 章的研究工作在于通过对总的浮游植物密度的预测来对赤潮的发生进行预测预警,因此浮游植物的密度应作为研究的对象。而知识发现虽然也能作预测,但其在赤潮研究中的主要任务在于发现特定藻类的生长规律,从藻类的数量增减与各理化因子之间的关系中发现知识,并以此为基础建立相应海域、相应藻类生长规律的知识库,所以应以表 7-1 中夜光藻的密度作为研究对象。

对夜光藻的密度暂以 10^4 个/m^3 为分界点,将其密度分为较高和较低两部分,数据分为训练数据集(前 14 组)与检验数据集(后 3 组)。应用决策树算法对上述监测数据进行计算,得到

表7-22中结果。

表7-22 决策树算法所发现的规则

	If	Then	置信度	支持度
1	$T<23$	夜光藻密度 $<10^4$ 个/m^3	100%	21.4%
2	$T\geqslant23, N<0.42$	夜光藻密度 $<10^4$ 个/m^3	100%	42.9%
3	$T\geqslant23, N\geqslant0.42$	夜光藻密度 $>10^4$ 个/m^3	100%	35.7%

如表7-22所示,将上述提取出的规则对检验数据进行检验,其分类正确率达到100%。

从结果中可以看出,夜光藻受温度及氮的浓度影响很大,而与其他几个参数基本没有关系。夜光藻的密度与氮的浓度关联很大,这与目前的结论是吻合的,但并不能认为夜光藻的密度与其他因素都没有关系或关系不大。通过观察不难看出,样本数据中盐度的变化不大,始终在30左右,所以无法显出它对夜光藻密度的变化趋势的影响。同样,磷的浓度及海水中的溶解氧也满足了夜光藻生长的基本需要。这说明在本次采样的条件下,温度和氮成为影响夜光藻生长趋势的关键因素。由此可以看出,不同海域,甚至不同季节所采集的数据对结果的影响都很大。包括夜光藻密度的警戒值的确定也是随不同海域、不同时间而改变的,这里只是粗略地选择一个值进行计算。

另外数据的选择对计算的结果影响很大,本次计算的样本数据在时间上相对较为集中,而且数据量小,因此,归纳的知识从表面上看起来比较简单,但是结果还是很准确地描述夜光藻密度和各参数间的关系。

由于受采样数据的影响,本节只是计算了夜光藻的密度与各影响因素间的关系。此外,还可以对数据作相应的预处理,计算夜光藻密度的变化量与各参数的变化的关系,即夜光藻密度增加时,各相应的参数是如何变化的。这样可以通过测量各参数的变化,计算出藻类的密度,由此了解藻类的生长特性。同样,如果能够得到赤潮发生前后的监测数据,则也能够得到藻类在赤潮发生时的相关知识,根据赤潮发生前藻类的生长特点以及对环境因素的监测结果,作出相应预测预警,进而采取一定的预防和治理措施。

随着渤海各海域监测体系的逐步完善,所积累的数据也会更加充分和完备,从所积累的数据中归纳出相应的知识,建立各海域藻类生长规律的知识库,对于赤潮发生、发展规律的认识以及赤潮预测预警系统的研究与建立,将起着至关重要的作用。

第 8 章　赤潮发生频率的极值分析

近年来，赤潮在世界范围内频繁发生，造成了巨大的经济损失。目前，大部分文献是关于赤潮发生机理的研究，为了能比较全面地认识赤潮发生的特点，提高赤潮预报的准确性，本章试图用极值理论的方法对赤潮发生的频率进行分析，即求出一个 T 次重现水平 $U_{(T)}$。T 是使得赤潮生物细胞浓度超过这一水平所需发生赤潮的次数，亦即经过 T 次赤潮才有一次超过这一水平。

8.1　极值理论

近些年来，极值理论有了迅速发展，在很多学科领域内引起了高度重视，并得到了广泛的应用。如在可靠性工程领域及人寿保险中，用来计算产品及人员的寿命；在环境监测中，用来估计降雨量、洪峰流量、水库容量等；在金融领域中，用来作风险分析。一般来说，极值的精确分布难以估计，主要研究的是其渐近分布。研究极值分布的理论称为极值理论（Extreme Value Theory，简称 EVT）。

8.1.1　极值的定义和表达式

1. 次序统计量与极值分布

设 $X_i(i=1,\cdots,n)$ 是取自分布函数为 $F_X(x)$ 的总体的一个样本，将其按大小排序 $X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$，则称 $X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$ 为次序统计量，$X_{(1)}=\min(X_1,\cdots,X_n)$，$X_{(n)}=\max(X_1,\cdots,X_n)$ 分别称为样本极小值和样本极大值，统称为样本极值，它们的分布称为极值分布。由极值构成的样本数据具有独立同分布的特点。

设 $F_X(x)$ 为总体的分布函数，$F_1(x)$ 为极小值分布函数，$F_n(x)$ 为极大值分布函数，则总体分布与它们之间有如下关系：

$$\begin{aligned}F_1(x)&=P(X_{(1)}\leqslant x)=1-P(X_{(1)}>x)\\&=1-P(X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n\geqslant x)=1-[1-F_X(x)]^n\end{aligned}\tag{8-1}$$

$$F_n(x)=P(X_{(n)}\leqslant x)=P(X_1\leqslant x,X_2\leqslant x,\cdots,X_n\leqslant x)=F_X^n(x)\tag{8-2}$$

由以上两式，可以从总体分布得到极值分布。但大多数情况下，总体分布是未知的，这就需要运用渐近理论的方法，人们常用的是 $n\to\infty$ 时所得到的极值渐近分布。

2. 标准极值分布的三种形式

下面的问题是当 $n\to\infty$ 时，样本极大值 $X_{(n)}$ 分布的可能分布类型是什么。也就是说，能不能找到一个通用的表达式 G 来表示这些可能的极值分布，并且要求 G 与 F 无关。如果这样，就可以直接用分布族 G 来估计分布，而根本不用考虑 F。

1943 年，统计学家 Gnedenko 证明了以下的极值分布。

定理 8.1　极值类型定理　如果存在常数序列 $a_n>0$ 和 b_n，使得对于某一非退化分布 G，当 $n\to\infty$ 时

$$P\left\{\frac{X_{(n)}-b_n}{a_n}\leqslant x\right\}\to G(x) \tag{8-3}$$

则 G 是下列三种类型的分布函数之一。

$$\text{I}: G(x)=\exp\{-\exp(-x)\}(-\infty<x<+\infty)$$

$$\text{II}: G(x)=\begin{cases}\exp(-x^{-\alpha}) & (x>0,\alpha>0)\\ 0(x\leqslant 0)\end{cases}$$

$$\text{III}: G(x)=\begin{cases}1(x\geqslant 0)\\ \exp\{-(-x)^{-\alpha}\} & (x<0,\alpha<0)\end{cases} \tag{8-4}$$

综合起来,定理 8.1 中的分布族分别称为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ型极大(值)分布,也称为 Gumbel、Frêchet、Weibull 分布,类似可得到极小值分布。

3.广义极值分布

鉴于统计目的,应用以上 3 个极值分布族并不方便。3 个分布族经过适当变换后,这 3 种类型的分布可用一种分布——广义极值分布表示:

$$G(x)=\exp\left\{-\left[1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\} \tag{8-5}$$

式中,定义域为$\left\{x\mid 1+\frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}>0\right\}$。极限分布Ⅱ型和Ⅲ型分别对应了 $\xi>0$ 和 $\xi<0$ 的情况,类型Ⅰ则是 $\xi\to 0$ 时的极限。参数 ξ 称为形状参数,μ 称为位置参数,$\sigma(\sigma>0)$称为尺度参数。

变换式(8-5)可以得到最大值的极限分位数

$$x_p=\mu-\frac{\sigma}{\xi}\{1-[-\log(1-p)]^{-\xi}\} \tag{8-6}$$

易得,$G(x_p)=1-p$。在极值术语中,x_p 称为重现期 $1/p$ 的重现水平。通常用式(8-6)预测得到适于模型但超出数据范围的重现水平的估计。

8.1.2 极值阈值方法

设 $X_i(i=1,\cdots,n)$是独立同分布的随机变量,它们的共同分布为 $F(x)$,如前面所讨论,X_i $(i=1,\cdots,n)$的极大值服从广义极值分布 $G(x)$。本节考虑这样一个问题:选取一个比较大的阈值 u,对于超出这一阈值的那些 X_i,它们服从什么样的分布?阈值又该如何选取?

1.超阈值分布

设 $X_i(i=1,\cdots,n)$是独立同分布的随机变量,它们的共同分布为 $F(x)$,选取一个阈值 u,使得 u 小于 F 的支撑集的右端点,即

$$u<\omega(F)=\sup\{x\mid F(x)<1\}$$

记 X 为任意的 X_i, $i=1,\cdots,n$,考虑下面的分布:

$$\begin{aligned}F^{[u]}(x)&=P(X\leqslant x\mid X>u)\\&=P\{X\leqslant x,X>u\}/P\{X>u\}\\&=\frac{F(x)-F(u)}{1-F(u)}\quad(x\geqslant u)\end{aligned} \tag{8-7}$$

称 $F^{[u]}$为超阈值分布。如果总体分布 F 是已知的,则形如式(8-7)的超阈值分布也可以求出

来，但在实际应用中，总体分布往往是未知的。如 8.1.1 节中的讨论，需要求出它的渐近分布。

定理 8.2 设 $X_i(i=1,\cdots,n)$是独立同分布的随机变量，它们的共同分布为 $F(x)$，令

$$M_n=\max(X_1,\cdots,X_n)$$

若 M_n 渐近服从广义极值分布，即

$$P\{M_n\leqslant z\}\approx G(z)$$

则超阈值分布（$\{X_i\mid X_i\geqslant u\}$的分布）为

$$\begin{aligned}H(y)=1+\log\tilde{G}(y)&=1-\left\{1+\xi\frac{(y-u)/\sigma}{1+\xi[(u-\mu)/\sigma]}\right\}^{-\frac{1}{\xi}}\\&=1-\left[1+\xi\left(\frac{y-u}{\tilde{\sigma}}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\end{aligned}\tag{8-8}$$

定义域为$\left\{y\mid 1+\frac{\xi(y-u)}{\tilde{\sigma}}>0\right\}$，其中，$G(z)$形如式(8-5)

$$\tilde{G}(y)=\exp\left\{-\left[1+\xi\left(\frac{y-u}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\}\tag{8-9}$$

$$\tilde{\sigma}=\sigma+\xi(u-\mu)\tag{8-10}$$

证明：由于

$$P\{M_n\leqslant z\}=F^n(z)$$

可知

$$F^n(z)\approx\exp\left\{-\left[1+\xi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\}\tag{8-11}$$

式(8-11)两边取对数，则有

$$n\log F(z)\approx-\left[1+\xi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\tag{8-12}$$

对于比较大的 z，由泰勒展开式可知

$$\log F(z)\approx-[1-F(z)]\tag{8-13}$$

于是就有

$$1-F(u)\approx\frac{1}{n}\left[1+\xi\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\tag{8-14}$$

$$F(y)-F(u)\approx\frac{1}{n}\left[1+\xi\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}-\frac{1}{n}\left[1+\xi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\tag{8-15}$$

所以

$$\begin{aligned}P(X\leqslant y\mid X>u)&=\frac{F(y)-F(u)}{1-F(u)}\\&=1-\left[1+\xi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\Big/\left[1+\xi\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\\&=1-\left\{1+\xi\frac{(y-u)/\sigma}{1+\xi[(u-\mu)/\sigma]}\right\}^{-\frac{1}{\xi}}\\&=1-\left[1+\xi\left(\frac{y-u}{\tilde{\sigma}}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\end{aligned}\tag{8-16}$$

这里

$$\tilde{\sigma}=\sigma+\xi(u-\mu)$$

在定理 8.1 的条件下，还可以推导出超阈量$\{X_i-u\mid X_i>u\}$的分布

$$P(X-u\leqslant y\mid X>u)=\frac{F(y+u)-F(u)}{1-F(u)}=1-\left[1+\xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}} \tag{8-17}$$

2.广义 Pareto 分布

超阈值$\{X_i\mid X_i>u\}$和超阈量$\{X_i-u\mid X_i>u\}$所服从的分布称为广义 Pareto 分布。由式(8-4)和定理 8.2 可以得到三种类型的广义 Pareto 分布。

指数分布：

$$W_0(x)=\begin{cases}1-\exp(-x) & (x>0)\\ 0 & (x\leqslant 0)\end{cases}$$

Pareto 分布：

$$W_1(x)=\begin{cases}1-x^{-\alpha} & (x>1,\alpha>0)\\ 0 & (x\leqslant 1)\end{cases}$$

Beta 分布：

$$W(x)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 0)\\ 1-(-x)^{-\alpha} & (-1<x<0,\alpha<0)\\ 0 & (x\leqslant -1)\end{cases} \tag{8-18}$$

把广义 Pareto 分布族统一地表示为

$$\left.\begin{aligned}&W_0(x)=1-\exp(-x)\quad (x>0)\\&W_\gamma(x)=1-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}\quad (0<x,\gamma>0;0<x<1/|\gamma|,\gamma<0)\end{aligned}\right\} \tag{8-19}$$

把位置参数 μ 和尺度参数σ 代入式(8-19)可得

$$\left.\begin{aligned}&W_0(x)=1-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\quad (x>\mu)\\&W_{\gamma,\mu,\sigma}(x)=1-\left[1+\gamma\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\gamma}\quad (\mu<x,\gamma>0;\mu<x<\mu+\sigma/|\gamma|,\gamma<0)\end{aligned}\right\} \tag{8-20}$$

由式(8-20)可得 Pareto 分布的密度

$$\left.\begin{aligned}&w_0(x)=\frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}\quad (x>\mu)\\&w_{\gamma,\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma}\left[1+\gamma\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-(1+1/\gamma)}\quad (\mu\leqslant x,\gamma>0;\mu\leqslant x<\mu+\sigma/|\gamma|,\gamma<0)\end{aligned}\right\} \tag{8-21}$$

以上讨论了超阈值和超阈量的分布，其中阈值的选取是有一定规则的。

8.1.3　T 次重现水平

在用极值理论对赤潮的发生作频率分析的时候，T 次重现水平是一个非常重要的概念，本节给出详细的介绍。

T 次重现水平就是一个阈值 $U_{(T)}$，满足在 T 次观测中有一次观测值超过这一阈值。每次

赤潮发生只有一个观测值,即赤潮发生期间赤潮生物的细胞浓度的最大值,就是说经过 T 次赤潮才有一次超过阈值 $U_{(T)}$。下面给出 T 次重现水平的求法。

设 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ 为独立同分布的随机变量,分布为 F,令 u 为事先确定的比较大的阈值(u 小于分布 F 的右端点),记

$$\tau_l = \min\{m \mid X_m > u\}$$

τ_1 为第一次超过阈值 u 的时间(称为第一次超过时间)。类似地,第 r 次超过阈值 u 的时间

$$\tau_r = \min\{m > \tau_{r-1} \mid X_m > u\} \quad (r > 1)$$

显然有

$$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \cdots$$

把 τ_1 看成一随机变量,可以求出它的分布函数

$$\begin{aligned} P\{\tau_1 = k\} &= P\{X_1 \leqslant u, \cdots, X_{k-1} \leqslant u, X_k > u\} \\ &= p(1-p)^{k-1} \quad (k = 1,2,3,\cdots) \end{aligned} \tag{8-22}$$

其中

$$p = 1 - F(u)$$

由式(8-22)可知,第一次超过时间服从参数为 p 的几何分布。它的均值

$$\begin{aligned} E(\tau_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} \\ &= p[1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + 4(1-p)^3 + \cdots] \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

令这一均值等于 T,可以得出 T 次重现水平 $U_{(T)}$,即 $U_{(T)}$ 是方程

$$E(\tau_1) = \frac{1}{1 - F(u)} = T \tag{8-23}$$

的解。由方程(8-23)解得

$$U_{(T)} = F^{-1}(1 - 1/T) \tag{8-24}$$

这里,分布 F 的确定将在下一节中讨论。

8.2　赤潮发生的频率分析

上一节介绍了极值理论的一些基本概念,本节在随机数模拟的基础上给出观测值所服从的分布函数的确定,并求出 T 次重现水平。

8.2.1　数据采集

针对赤潮发生时影响面积大、持续时间短的特点,在赤潮观测中,往往要在赤潮发生的水域设很多的观测站,并在一天中作多次(早、中、晚)观测,记录下观测数据进行分析。本节所要考虑的是某一水域同一观测站多次赤潮的观测数据。

由于要用到大量的数据,这里用正态分布的随机数来代替赤潮的实际观测数据。假定赤潮生物的细胞浓度的观测值服从均值为 2、方差为 1 的正态分布,产生 100 次这样的随机数作为 100 次赤潮的观测数据,每次产生 21 个随机数,表示每次赤潮发生期间,同一观测站在一星

期内测得的 21 个观测数据(每天 3 个数据)。从每次的 21 个数据中取最大值,就得到了由极大值构成的一组数据($x_1, x_2, \cdots, x_{100}$)。下面求这组数据所服从的分布函数。

8.2.2 密度函数的估计

记 X 为任意的 $x_i, i=1,2,\cdots,100$,由 8.1 节知道,X 服从广义极值分布,即

$$X \sim G(x;\theta)$$

其中,$\theta=(\mu,\sigma,\xi)$为未知的参数,需要由极大似然估计得出。由于 $\xi=0$ 和 $\xi\neq0$ 分别对应 $G(\theta)$的不同表达形式,因此要有一个标准用来选择合适的分布模型。

在作极大似然估计之前,可以作出观测值所服从的分布密度的一个估计,通常有两种方法:构造经验分布密度函数;构造核密度函数(kernel density)。构造出的函数作为观测值的真实分布密度,然后由极大似然估计作拟合,从而得出适合的分布。下面给出详细的讨论。

1.经验密度函数

把 $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$作为 X 的一个样本,可以得到 X 的经验分布函数

$$\hat{F}(x)=\frac{1}{n}\sum_{i\leqslant n} I \quad (x_1\leqslant x) \tag{8-25}$$

式中:$n=100$,I 为示性函数。$\hat{F}(x)$是离散的函数,对它在$(t_j, t_{j+1}]$上作线性插值可得

$$\begin{aligned} F(x) &= \hat{F}(t_j)+\frac{x-t_j}{t_{j+1}-t_j}[\hat{F}(t_{j+1})-\hat{F}(t_j)] \\ &= \hat{F}(t_j)+\frac{(x-t_j)n_j}{t_{j+1}-t_j} \quad (t_j< x\leqslant t_{j+1}) \end{aligned} \tag{8-26}$$

式中:n_j 为观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$落入区间$(t_j, t_{j+1}]$的频率。

由式(8-26)构造的 X 的分布函数 $F(x)$是连续的,对它关于 x 求导即得 X 的密度函数

$$\hat{f}(x)=\frac{n_j}{t_{j+1}-t_j} \quad (t_j< x\leqslant t_{j+1}) \tag{8-27}$$

记 $n(j)$为观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$落入区间$(t_j, t_{j+1}]$的个数,则式(8-27)可改写为

$$\hat{f}(x)=\frac{n(j)}{n(t_{j+1}-t_j)} \quad (t_j< x\leqslant t_{j+1}) \tag{8-28}$$

这是由样本 $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$确定的密度函数,把它作为样本的经验分布密度,可以很好地反映出观测值所服从的分布,但是有一个缺点,就是在构造这个函数的时候,必须先确定区间(t_j, t_{j+1}]的划分。为解决这个问题,可以作一个均匀的划分,得到直方图作为样本的经验分布密度。但直方图是不连续的,下面给出另外一种构造光滑密度函数的方法,即构造影响函数核密度(kernel density),以下简称为核密度函数。

2.核密度函数

假定有

$$g(x,x_i)=\frac{1}{n(t_{j+1}-t_j)} \quad (t_j< x\leqslant t_{j+1}) \tag{8-29}$$

式(8-29)表示点 x_i 落入区间$(t_j, t_{j+1}]$。于是就有

$$\hat{f}(x)=\sum_{i\leqslant n} g(x,x_i) \quad (t_j< x\leqslant t_{j+1}) \tag{8-30}$$

显然,$g(x,x_i)$是定义在区间$(t_j, t_{j+1}]$上的常函数。令 $b>0$ 为步长,构造不依赖区间$(t_j, t_{j+1}]$

的函数

$$g_b(x,x_i)=\frac{1}{nb}k\left(\frac{x-x_i}{b}\right) \tag{8-31}$$

式中：$k(\cdot)$为一个核函数(kernel function)，满足

$$\int k(y)\mathrm{d}y=1$$

如果 $k(\cdot)\geqslant 0$，则 $k[(x-x_i)/b]/b$ 可以看成具有位置参数 x_i 和尺度参数 $b>0$ 的密度函数。由式(8-30)和式(8-31)可得

$$\hat{f}_b(x)=\sum_{i\leqslant n}g_b(x,x_i)=\frac{1}{nb}\sum_{i\leqslant n}k\left(\frac{x-x_i}{b}\right) \tag{8-32}$$

如果 $k(\cdot)\geqslant 0$，则 $\hat{f}_b(x)$为 X 的核密度函数。其中，核函数 $k(\cdot)$可以有不同的表示形式，如表8-1所示。取不同的核函数 $k(\cdot)$，对得出的核密度函数影响不大。

但是式(8-32)中的步长 b 的取值会影响到核密度函数的性质。如果 b 取较小的值，即 $g_b(x,x_i)$有较小的尺度参数，它能反映出每个数据所包含的信息，这时核密度函数 $\hat{f}_b(x)$的图像是不光滑的折线；相反，若 b 取较大的值，核密度函数 $\hat{f}_b(x)$的图像是光滑的曲线，此时会丢失数据所包含的一些信息，参见图8-1。图8-1是数据$(x_1,x_2,\cdots,x_{100})$所对应的核密度函数 $\hat{f}_b(x)$的图像。

下面给出求步长 b 的方法，令

$$MSE(\hat{f}_b)=E[\hat{f}_b(x)-f(x)]^2 \tag{8-33}$$

$$ISE(\hat{f}_b)=\int[\hat{f}_b(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x \tag{8-34}$$

式中，假定 $f(x)$为样本所服从的真实分布密度，它是未知的。

表8-1 核函数 $k(\cdot)$

核函数	$k(\cdot)$
Uniform	$\frac{1}{2}I(\lvert u\rvert\leqslant 1)$
Triangle	$(1-\lvert u\rvert)I(\lvert u\rvert\leqslant 1)$
Epanechnikov	$\frac{3}{4}(1-u^2)I(\lvert u\rvert\leqslant 1)$
Quaritic	$\frac{15}{16}(1-u^2)^2I(\lvert u\rvert\leqslant 1)$
Triweight	$\frac{35}{32}(1-u^2)^3I(\lvert u\rvert\leqslant 1)$
Gaussian	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$
Cosinus	$\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}u\right)I(\lvert u\rvert\leqslant 1)$

式(8-33)称为均方误差，式(8-34)称为平方积分误差(integrated squared error)。对式(8-34)求均值可得

$$MISE(\hat{f}_b)=E\left\{\int[\hat{f}_b(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x\right\}$$

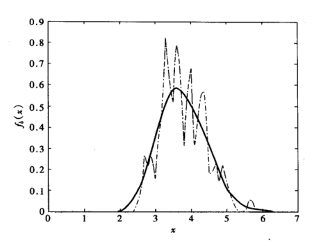


图 8-1 核密度函数图

$b=0.5940$(实线)，$b=0.1120$(虚线)

$$=\int\{E[\hat{f}_b(x)-f(x)]^2\}\mathrm{d}x$$

$$=\int MSE[\hat{f}_b(x)]\mathrm{d}x=IMSE(\hat{f}_b) \tag{8-35}$$

式(8-35)是关于步长 b 的函数，在$\min\limits_{b} MISE(\hat{f}_b)$的条件下，可以得出步长 b 的估计值。但是由于式(8-35)比较复杂，需要作近似的简化。下面给出一个定理。

定理 8.3 若 $k(x)$满足下面的条件：

①$k(x)$定义在$[-1,1]$上，并且是对称的；

②$\int k(x)\mathrm{d}x=1$，即 $k(x)$是一个密度函数；

③$\int xk(x)\mathrm{d}x=0$；

④$\int x^2k(x)\mathrm{d}x=\sigma_k^2>0$。

则当 $b\to0$，$nb\to\infty$时

$$MISE(\hat{f}_b)\approx\frac{1}{4}\sigma_k^4b^4\int[f''(x)]^2\mathrm{d}x+\frac{1}{nb}\int[k(x)]^2\mathrm{d}x \tag{8-36}$$

由定理 8.3，式(8-35)简化为式(8-36)。令

$$\hat{b}=\arg\min_{b} MISE(\hat{f}_b)$$

可得

$$\hat{b}=\left\{\frac{\int[k(x)]^2\mathrm{d}x}{\sigma_k^4\int[f''(x)]^2\mathrm{d}x}\right\}^{\frac{1}{5}}n^{-\frac{1}{5}} \tag{8-37}$$

式中，$f(x)$是未知的，可以用直方图来代替，取

$$k(x)=\frac{3}{4}(1-x^2)I\quad(-1\leqslant x\leqslant1) \tag{8-38}$$

它是 Epanechnikov 核函数,满足核函数的性质。由式(8-37)可得 $\hat{b}=0.5940$,相应的核密度函数如图 8-1 所示。

不同的核函数 k_1 和 k_2 对应的步长 $\hat{b}_1$ 和 $\hat{b}_2$ 的取值也不同,它们之间有下面的转换关系

$$\hat{b}_2=\delta_2\hat{b}_1/\delta_1 \tag{8-39}$$

式中,$\delta_i(i=1,2)$为核函数 $k_i(x)$对应的尺度参数。不同的核函数对应的尺度参数如表 8-2 所示。

表 8-2　不同核函数对应的尺度参数

核函数	δ
Uniform	$\left(\frac{9}{2}\right)^{1/5}\approx 1.3510$
Epanechnikov	$15^{1/5}\approx 1.7188$
Quaritic	$35^{1/5}\approx 2.0362$
Gaussian	$\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/10}\approx 0.7764$

8.2.3　参数估计

仅从图 8-1 无法看出观测值所服从的具体分布,下面采用参数估计的方法求出这一分布。

1.极大似然估计

由 8.1.1 节已经知道,X 服从广义极值分布 $G(x;\theta)$,其中 $\theta=(\mu,\sigma,\xi)$。若 $\xi=0$,X 服从 Gumbel 分布;若 $\xi\neq 0$,X 服从 Frêchet($\xi>0$)和 Weibull($\xi<0$)分布,相应的对数似然函数分别为

$$l(\theta)=-n\log\sigma-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)-\sum_{i=1}^{n}\exp\left[-\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right] \tag{8-40}$$

$$l(\theta)=-n\log\sigma-(1+1/\xi)\sum_{i=1}^{n}\log\left[1+\xi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right]-\sum_{i=1}^{n}\left[1+\xi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi} \tag{8-41}$$

假定 $\xi=0$,由式(8-40)可得 θ 的极大似然估计$\hat{\theta}_1=(3.4752758,0.5470761)$;假定 $\xi\neq 0$,由式(8-41)可得 $\hat{\theta}_2=(3.5247730,0.5676988,-0.1660516)$。即若 $\xi=0$,X 服从参数为$\hat{\theta}_1$ 的 Gumbel 分布;若 $\xi\neq 0$,X 服从参数为$\hat{\theta}_2$ 的 Weibull 分布。下面需要从这两种分布中选出最适合的分布。

2.模型检验

概率图(PP 图)、分位数图(QQ)图、重现水平图、密度图(直方图)可以用来评估模型(广义极值模型)拟合的好坏。假定由极大似然估计得出的分布为 $\hat{G}(x)$,记样本的次序统计量为 $x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$,则概率图由下面的点组成

$$\left(\frac{i}{n+1},\hat{G}(x_{(i)})\right)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

分位数图由如下的点组成

$$\left[\hat{G}^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right),x_{(i)}\right]\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

如果样本服从广义极值分布，则概率图和分位数图应该近似为直线。

由式(8-42)可知，重现水平图由点集$\{(T,U_{(T)})\}$组成，$U_{(T)}$是 T 次观测重现水平，

$$U_{(T)} = \hat{G}^{-1}(1-1/T)$$

通过上述分析，可以得出模型的诊断图，如图 8-2 所示。由图 8-2 可以直观地看出参数为 $\hat{\theta}_2$ 的 Weibull 分布能更好地拟合样本的分布，而用参数为 $\hat{\theta}_1$ 的 Gumbel 分布作为拟合，其效果要差一些。但是为了精确，应该有一个确定的选择标准。

以下给出一个选择参数的标准。假定 $X \sim G_\theta(x)$，密度函数为 g_θ，定义 $d(\hat{f}_b, g_\theta)$如下：

$$d(\hat{f}_b, g_\theta) = \| \hat{f}_b - g_\theta \|_{L^2} = \Big\{ \sum_{x\in A} [\hat{f}_b(x) - g_\theta(x)]^2 \Big\}^{1/2} \tag{8-44}$$

结合图 8-1，令 $A = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, \cdots, 7\}$。把 $\hat{\theta}_1$、$\hat{\theta}_2$ 分别代入式(8-44)，对应于较小的 $d(\hat{f}_b, g_\theta)$的 $G_\theta(x)$就是所要的分布，计算结果如表 8-3 所示。

表 8-3 $d(\hat{f}_b, g_\theta)$的计算结果

参数	$d(\hat{f}_b, g_\theta)$
$\hat{\theta}_1$	0.355 721
$\hat{\theta}_2$	0.228 432

从表 8-3 选择 $\hat{\theta}_2$ 对应的 Weibull 分布，即 X 服从参数为$\hat{\theta}_2$ 的 Weibull 分布。从图 8-3 也可以很直观地看出这一结果。

这里需要说明的是，关于如何在 GEV 模型和 Gumbel 模型之间进行选择，一直是一个比较有争议的问题。从直观上看，两种模型所估计的重现水平线相似，但 GEV 模型中置信区间要宽一些，特别是当重现期较长时，置信区间更宽。从减小不定性出发，如果 Gumbel 模型是可信的，应优先选择它，但问题是 Gumbel 模型是否可靠。Gumbel 模型是 GEV 模型的子族，极值类型理论为极大值数据建立 GEV 模型提供了理论依据。这些数据表明 Gumbel 模型是可靠的，但这不能说明其他模型就不可靠。事实上，如果 GEV 模型的极大似然估计 $\zeta = 0$ 能否说明 Gumbel 模型是合适的，关于这个问题仍没有达成共识，但最好的做法是：不管 Gumbel 模型正确与否，都得接受形状参数的不定性并且优先选择基于 GEV 模型所作的推断。

8.2.4 求 T 次重现水平

上一节得出了 $X \sim G_{\hat{\theta}_2}(x)$，由式(8-24)可得 T 次重现水平

$$U_{(T)} = G_{\hat{\theta}_2}^{-1}(1-1/T) \tag{8-45}$$

即

$$\begin{aligned} U_{(T)} &= \mu - \frac{\sigma}{\xi}\{1 - [-\log(1-1/T)]\}^{-\xi} \\ &= 3.524\ 773\ 0 + 3.418\ 809\ 6\{1 - [-\log(1-1/T)]^{0.166\ 051\ 6}\} \end{aligned} \tag{8-46}$$

把 $T = 10, 30, 50, 80, 100$ 分别代入式(8-46)，得出相应的 T 次重现水平，如表 8-4 所示。

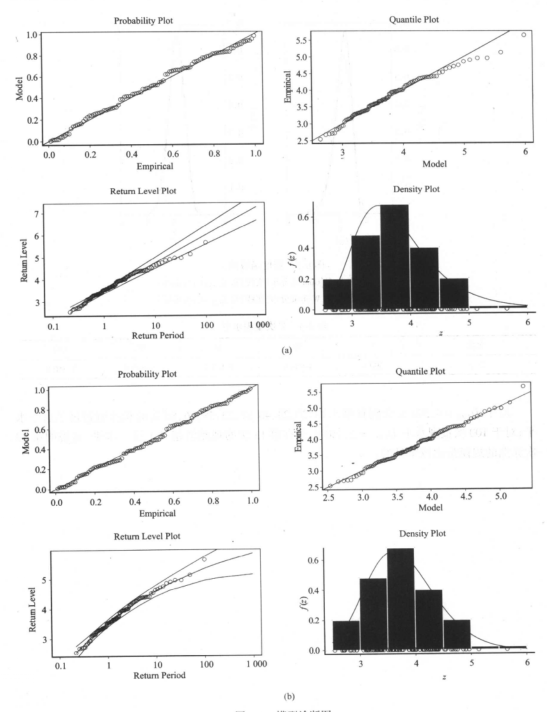


图 8-2　模型诊断图

(a)参数为 $\hat{\theta}_1$ 的 Gumbel 分布的模型诊断图；(b)参数为 $\hat{\theta}_2$ 的 Weibull 分布的模型诊断图

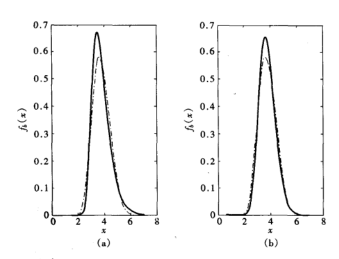


图 8-3 密度函数图，

(a)参数为 $\hat{\theta}_1$ 的 Gumbel 分布(实线)和 $\hat{f}_{0.5940}(x)$(虚线)

(b)参数为 $\hat{\theta}_2$ 的 Weibull 分布(实线)和 $\hat{f}_{0.5940}(x)$(虚线)

表 8-4 T 次重现水平

次数	10	30	50	80	100
$U_{(T)}$	4.590 8	4.994 6	5.155 1	5.290 4	5.350 9

对于 $U_{(10)}=4.5908$，分别有第 5、13、20、23、46、51、53、58、66、86 次的观测值超过了这一水平；对于 100 次重现水平 $U_{(100)}=5.3509$，只有第 13 次的观测值超过了这一水平，这说明第 13 次赤潮的规模是比较罕见的。

第 9 章　赤潮的预测预警系统与综合治理

9.1　赤潮预测预警系统

9.1.1　赤潮预测预警方案建立的基础

赤潮预测预警系统的建立,离不开对赤潮高发区的及时、准确和全面的监测。在掌握了影响赤潮发生的全部因素的基础上,实时对相关海域进行监测,根据所得信息,判断赤潮发生的可能及其危害程度,这对于赤潮的预测和防治具有重要的意义。

赤潮是一种十分复杂的生态异常现象,其形成的原因是多方面的。有害赤潮(HABs)的监测内容包括采样的时间和空间、界定的采样区域和站位、采样频率、水质水文、气象参数、生物样品的定性和定量分析、锚系浮标、光照、光衰减、波幅等诸多因素。卫星照片可以提供更多的水团分布和运动情况及表层水中的藻类的生物量(颜色和色彩强度等)。

制定一个行之有效的监测计划对研究赤潮、积累数据、建立和完善相关数据库,及为预测和预报提供快速和准确信息等作用很大。赤潮监测主要包括以下几个方面。

(1)海水养殖业

监测计划对有害赤潮能够提供早期预警,确定特定种类的毒害反应及作用浓度,指导海水养殖者提前做好防范准备,并在赤潮后持续监测,防止任何有害成分的侵害。

(2)生态系统损伤

监测计划对特定种类引发的有害赤潮可能对海洋生态系统造成的损伤提前作出预报,制定出相应的政策和措施,以防止有害赤潮对生态系统的侵蚀。同样,在任何潜在的危害未完全消失之前,要对有害赤潮进行持续的监测。

(3)渔业

早期预报可以使监测结果的使用者了解赤潮发生的区域内有毒藻类对贝类和鱼类的致毒性(包括毒性的种类、富集的贝类等),采取关闭某些海域的渔场,建议渔民另选作业区等措施;或对贝类影响不大的赤潮发生区进行监测,防止染毒贝类进入市场,并对人类造成危害。对有害赤潮的监测要一直持续到其危险性完全消失。

(4)富营养化和气候的变化

监测计划和预警预测系统的建立需将有害赤潮的发生作为全球和地区性富营养化指标或者长期气候变化指标。这就需要仔细鉴定藻华中的生物(包括浓度水平、有害藻类的种类等)以及需要长期、定点或定区域采集样品,并对资料进行系统分析。

对现有有关赤潮文献的处理,包括使用现存的区域或地方性环境资料对特定的海域的基本情况,如生物、化学、物理状况(包括温度和气象变化等)进行初步了解。首选资料包括潜在有毒藻类的发生时间和空间分布情况及影响后果的历史资料。其次包括水团的物理和化学特征及其季节变化和年变化。重要参数包括温度、盐度、表层水的分层、表层环流(有害赤潮的藻类的迁移)、无机营养盐的来源和时空分布等。再次,气象的变化资料也是监测资料的重要内

容,包括季节性降雨、风暴或者特殊的风场(如季风及其形成的洋流等)。除此之外,监测资料还包括易受到有害赤潮(HABs)冲击的当地生态系统组成、生态资源(如珊瑚礁、渔场或者贝类产地等),这些资料在制定监测计划和赤潮的预测预警系统是也十分重要。

9.1.2 赤潮预测预警方案建立的总体思想

随着我国经济的迅猛发展和城镇化进程的加快,沿海地区工农业废水和生活污水排放量不断增加,海洋环境污染严重,赤潮灾害呈现出发生频率增加、暴发规模扩大、原因种类增多、危害程度加重的发展趋势,已经成为沿海地区的主要海洋灾害之一。赤潮灾害严重破坏正常的海洋生态系统,危害渔业资源和海产养殖业,威胁人类健康和生命安全。因此,全面开展赤潮预防控制治理工作,有效减轻赤潮灾害造成的损失,是一项十分重要和紧迫的任务。

我国对赤潮的研究尽管起步较晚,但是对赤潮的研究海域却从渤海到南海,在海域富营养化、赤潮生物、赤潮藻类种属、赤潮发生与环境的关系方面取得了不少成果。近年来,国内外对赤潮的研究更加活跃,从微观的毒理到宏观的对策等方面都进行了全面的研究。总的看来,这些研究多限于赤潮灾害的调查及其防治,而赤潮成因的研究几乎处于停滞状态,更没有涉及赤潮的预报问题。这是由于赤潮的成因相当复杂,除了赤潮生物自身的特征之外,还涉及物理、化学、水文、气象等诸多因素。虽然 20 世纪 80 年代以来,国际上对赤潮的预报开展了大量的工作,提出许多预报方法,但是有效的预测实例很少,有的仅限于局部海域有效。归纳起来,这些赤潮的预报方法有以下几种:以与增殖有关的因子为预测指标,如以营养盐变化进行预测、以赤潮生物形态或性质变化进行预测、以赤潮生物细胞的生理变化进行预测,或以赤潮生物的生态环境因子进行预测等;还有以聚集因素有关因子为预测指标,如黑潮水系流入型预测法、等值线型预测法、垂直稳定度预测法等。但是上述方法仅限于对一种或几种赤潮的影响因子的考虑,或者仅限于对赤潮藻类本身的几个理化因素进行考虑,建立的基础往往是统计学规律或者是简单的模型分析,而赤潮的发生综合多方面的因素。为了对赤潮预测、预警进行更深入的研究,必须综合考虑各种过程,以便从根本上探讨、揭示赤潮发生发展的规律。

赤潮预防控制治理工作是一项长期、复杂的系统工程。为了能够较为快速、准确地对赤潮的发生进行预测、预警,进而进行防治,把由赤潮灾害引起的损失减至最少,需要加强对赤潮常发生海域的各方面的环境因素的实时监测和研究。在收集相关信息,并对其进行分析和整理的基础上,逐步建立典型海域有害赤潮生态学和海洋学的文献库、数据库,建立数据库/专家系统,并在实际的赤潮预测、预警中对系统模型进行评价,不断修正和完善专家数据库系统,使其比较科学地反映特定海域的状况。专家数据库系统主要包括以下几个方面。

(1)特定海域的赤潮藻类种属数据库的建立

首先要对该海域典型的赤潮藻类的种属进行识别、分类,并建立该海域的赤潮种属库。其次对赤潮的优势种属进行围隔实验,对其生态生理特征、生活史、藻类毒素等进行全面的研究。

(2)有害赤潮(HAB)种群生态动力学

通过围隔试验,对赤潮藻类的生态动力学模型进行数值模拟和仿真研究具有很重要的意义。数值模拟对研究所起的作用是野外观测和实验室研究所不可代替的。野外观测结果是各种过程作用的综合效果,难以确定某一因子的作用。而实验室研究只能考虑单个或少数几个因素造成的影响,很难进行综合实验。众所周知,数值模式可以通过参数控制进行数值实验,以便确定哪些因素在赤潮发生和发展的过程中起重要作用。数值方法既可以确定单个因素的

影响，又能对多因素的效果进行数值研究。数值模式具有可重复性，能节约大量资金，也可以大大缩短赤潮的研究周期。这不仅有利于赤潮成因与机理的理论研究，而且将会推动赤潮预测、预报的不断发展。

无论是观测还是理论研究，其目的归根结底在于对赤潮发生进行预测、预警，减少赤潮灾害造成的损失。从预测、预警角度上看，预报是采用较完善的性能良好的数值模式来实现；从理论上来看，数值模式可以用野外观测和实验结果来检验，反过来又能进一步指导野外或实验室的工作。

(3)特定海域水体动力学

海洋水体动力学也是影响赤潮形成和发生过程的重要因素。在近海海域，由于河流径流把大量的污染物带入海域，造成局部海域的营养盐浓度严重超标，即形成特定海域的富营养化。潮汐和洋流的对流和扩散作用，能使局部海域的营养盐迅速扩散，使特定海域的营养盐浓度降低，从而避免藻类的暴发繁殖。同时洋流的对流和扩散作用能使聚集某一特定海域的赤潮藻类被冲散到其他海域或者更广阔的海域，使赤潮藻类的聚集浓度较低，从而不能形成赤潮。但是由于洋流对流的影响，也使沉落在海底的赤潮藻类的孢子被带到水体的表层，特别是在天气较好的情况下，被带到表层的孢子容易发芽、繁殖，如果其他环境因子满足其暴发繁殖条件，就会引发赤潮。

对局部海域的常年洋流进行数值模拟，掌握不同海域每个季节的洋流模型及其相关的影响参数，不仅可以提供相关海域的物理状况，而且可以将其与藻类生长的生态动力学模型相结合，建立海洋生态动力学综合模型，为赤潮的预报、预警提供更为完善的理论模型依据。

(4)沿海排污引起的海域营养盐环境因子的变化

营养盐是赤潮藻类生长所必需要的物质基础，也是引起藻类暴发繁殖的重要环境因子。水体的富营养化是引发赤潮的原因，而由于工农业污染物、生活污水等随径流入海，特别是海水养殖所造成的污染，使局部海域形成了富营养化。尤其是河口附近的海域，营养盐的浓度都远远超过藻类生长所需浓度。海洋中的氮、磷营养元素和赤潮生物的化学循环如图9-1所示。

一般认为，氮和磷是海洋藻类生长繁殖所需的最重要营养元素。除氮和磷之外，含硅、铁、锰等元素的无机盐和维生素B_{12}等有机物也是影响藻类生长、繁殖的营养因子。

为了了解特定海域的营养盐浓度变化，需要对该海域水体的物理、化学状况进行监测，并了解和建立由径流带来污染物对营养盐浓度变化的污染模型。同时对关键性营养因子氮和磷的循环进行跟踪研究；结合洋流和生态动力学模型，建立控制性环境因子的循环模型，从而对赤潮进行预报和监控。

(5)水文、气象等其他环境因子的变化

由于渤海的大部海域处于富营养化状态，无机盐的浓度始终超过藻类生长所需的浓度，所以水文、气象条件是引发赤潮的导火索。水温气象条件主要包括温度、降雨、风速和风向等。大量的陆面降水导致入海的淡水量增加，使海水淡化；同时内陆河水所携带的丰富的有机物质及污染物也随之入海，使海水的富营养化程度加剧，这是赤潮形成的有利条件之一。在每年的5月、8月和10月，渤海海域的气温较高，如果再遇到连续晴朗天气、日照充足、风速较小、扩散能力较差，赤潮藻类极易繁殖和聚集，从而形成赤潮。

加强海域的中、长期的天气预报工作，掌握特定海域的年变化和季节变化规律，有助于建立赤潮的预测、预警系统机制。

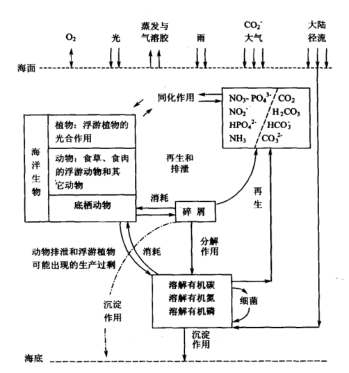


图 9-1 海洋中的 N、P 营养元素和赤潮生物的化学循环

(6)赤潮卫星遥感跟踪预报

赤潮发生时，局部海域水体中含有大量的赤潮藻类，这样就可以通过卫星遥感技术，依据海洋水色、海面温度(SST)、叶绿素 a 的浓度来判断赤潮发生的海域、面积大小和移动扩散方向等。

随着监测技术的发展，卫星遥感技术近年来成为赤潮预报和评估的有效手段。卫星遥感技术的关键是开展了富营养水体的地物光谱测量工作，测取不同类型富营养水体的光谱曲线；同时，要测定不同藻类、不同叶绿素浓度的光谱，掌握不同藻种的光谱特性。目前，在我国有关卫星遥感监测主要有三种方法。第一种是图像合成方法。多数赤潮现象的主要直观特征是海水水色异常，与正常海水水色有明显的差异，利用这个特点，选择 3 个波段的图像进行假彩色合成，找到水色异常区，从而判断出赤潮区。第二种是海水表层温度(SST)的检测技术。海水温度是赤潮发生与否的一个重要因子，赤潮发生前后海水温度的变化机理显著不同，可以通过温度的识别来判断和预测赤潮的发生和消亡。在对赤潮发生的环境温度和赤潮发生后温度变化情况进行系统分析的基础上，本章探讨了赤潮发生后海面表层温度变化的机理，并运用海面温度场计算模型，对 1998 年 9 月发生在渤海的赤潮过程的海面温度变化情况作了系统的分析，且通过实际监测资料的对比，证明了海面温度场资料在赤潮遥感监测中的作用。第三种是海表细胞生物量的反演。利用卫星图像进行波段运算，建立图像辐射亮度值与赤潮浮游植物细胞数量之间的关系，反演海表浮游植物细胞数量，并利用赤潮生物细胞数量的判断阈值圈定赤潮发生区，量算赤潮区面积，直接为减灾提供科学依据。

9.1.3 赤潮预测预警方案的评价

若对实施方案进行科学的评估，遇到的第一个问题就是评价指标的选择，不同的指标选择关系到是否能客观、正确地评价预测、预警系统的科学性和系统改进方向的科学性。为了较为客观、科学、全面地反映系统，要遵循以下几个原则。

(1)总体性原则

建立的指标体系要能全面反映赤潮危害的各个方面。人类社会的生活环境是由自然环境、社会环境、经济环境等构成的综合协调体，其中一个环节出现问题，都会给其他环节带来不利的影响，赤潮灾害更是如此。因此，在建立评估指标时要注意以下几个问题。

①不能只注意灾害的本身，赤潮灾害的本身规模大小、危害程度并不能直接反映赤潮灾害损失的大小。

②不能只重视经济价值，而忽视可能造成的对社会秩序和人民心理健康的影响，也不能忽视赤潮对环境造成的影响，这些影响往往要在很长一段时间才能表现出来。

(2)客观性原则

在选取指标的过程中，应当以能真实反映赤潮发生过程及其危害的状况为准绳，不能带有任何主观目的。对于赤潮灾害对渔业、水产养殖业、滨海旅游业、人民健康等方面造成的影响，评估指标要综合反映各方面的损失。

(3)空间性原则

赤潮发生的海域不同，影响赤潮发生的控制因子则不同，预测、预警系统模型也不同。评价模型时要充分考虑到模型适应海域的物理、化学和生物状况，选择相应的具体评价指标。

(4)时间性原则

同一海域，不同季节，物理、化学和生物状况也差异很大，特别是由于气候和气象引起的各种赤潮因子变化很大。所以要根据不同季节、不同的气候、气象条件，选择评价系统模型的标准。

赤潮发生原因较复杂，发生的机理至今尚无定论，其发生受海洋生物的生物学特性(生活周期、增殖率、细胞迁移率和胞囊的形成与萌芽)、海水中的营养盐、水体稳定性、水体交换率、上升流的存在、水温及盐度、海域的气象条件(风力、风向、气温、气压、日照强度、降雨)以及淡水注入等影响。所涉及学科包括生物、物理、化学、力学、系统学等多门学科，因此需要广泛采纳科研工作人员、专家学者、海洋监测人员的综合评价意见。故对于赤潮预测预警系统方案的评价拟采用综合评价法。

当所有评价对象希望能在所有评价属性方面得到一个综合评价效果时，就要求有一个综合评分法。在评价时，当不同属性在评价者心目中所据的地位、重要性有很大差别时，需要将这些属性放到总的系统评价环境中，权衡它们各自在其中所占的重要性，并定量地表示出来。为方便起见，一般常用规范化的权重系数，即用 W_j 表示第 j 个属性的权重系数，W_j 满足下式：

$$\sum_{j=1}^{n} W_j = 1 \quad (0 < W_j < 1, j = 1, 2, \cdots, n)$$

获得权重系数的过程本身也是一个评价过程。用加权加法评分，就可以计算综合评分值 $\tilde{S}_i$，即

$$\tilde{S}_i = \sum_{j=1}^{n} W_j \tilde{S}_{ij} \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

为了更直观一些,该方法也可以用矩阵表示,如表 9-1 所示。

表 9-1 加权加法评分矩阵表

对象 i \ 属性 j	1	2	…	n	综合评分值
加权值	W_1	W_2	…	W_n	
1	$\tilde{S}_{11}$	$\tilde{S}_{12}$	…	$\tilde{S}_{1n}$	$\sum_{j=1}^{n} W_j \tilde{S}_{1j} = \tilde{S}_1$
2	$\tilde{S}_{21}$	$\tilde{S}_{22}$	…	$\tilde{S}_{2n}$	$\sum_{j=1}^{n} W_j \tilde{S}_{2j} = \tilde{S}_2$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
m	$\tilde{S}_{m1}$	$\tilde{S}_{m2}$	…	$\tilde{S}_{mn}$	$\sum_{j=1}^{n} W_j \tilde{S}_{mj} = \tilde{S}_m$

基于以上方案评价所遵循的准则,对系统方案的评价拟选用方案的总体性、准确性、时间原则、空间原则以及可持续发展指标作为评价的属性,综合考虑科研工作人员、专家学者、海洋监测人员的评价意见,采用每位专家对评价属性的加权加法评分法进行打分,针对评价结果对系统方案再进行评测和修正。

9.1.4 赤潮预测预警方案

有关赤潮预测、预警系统的研究,在国内外的研究历史比较短,不同的学者根据自己研究的领域提出不同的赤潮预报方法,并在预报一些赤潮时取得了较为满意的结果。甚至有的学者试图建立一套普适的预报模型,对不同海域进行赤潮的预报。赤潮的发生是一个十分复杂的开放过程,单纯地考虑一种或几种自然或者人为因素都不能准确、全面反映赤潮发生机制的本质规律。但是由于物理因素的影响,使得各个海域的不同季节又有很大的差异,所以试图建立有关赤潮预报的普适模型又是极其困难,甚至是不切合实际的。

根据不同海域的赤潮因子的具体特点,以及影响赤潮因子的因素的具体特征,建立适合特定海域的赤潮预测、预警系统是比较实际可行的。以渤海湾为例,对预测、预警系统的建立作以下论述。

首先,根据海洋监测数据,建立渤海湾赤潮藻类种属数据库。针对该海域赤潮常见优势种中肋骨条藻、夜光藻、裸藻、颤藻、鞭形藻、长菱形藻、长海毛藻、海链藻、圆筛藻等进行生物学和分类学的研究,并对新出现的赤潮藻类进行整理和研究。掌握各种赤潮藻类的生活特性和生活史,并对有毒赤潮进行重点研究,明确其毒素机理和防治方法。在此基础上,通过海洋围隔试验研究它们的生态动力学,建立其生态动力学模型,通过对模型的分析、求解和模拟找出相关赤潮藻类的控制环境因子及其种群间的相互关系,这是赤潮预警、预测和防治的关键所在。

其次,采用实地监测、地理信息系统技术等手段,建立渤海湾海域的环境污染海域的水环境质量状况(COD、氨氮、亚硝酸氮、硝酸氮、活性磷酸盐、溶解氧、温度、pH 值、盐度、叶绿素 a 等指标),将其输入信息库系统,并以考察赤潮控制因子为重点,将陆源污染信息、社会经济、海域利用等信息结合起来,可及时了解海域营养盐的空间分布状况,为赤潮的分析判读提供背景

依据。

再次,渤海湾为封闭的海域,根据封闭海域水文、气象等特点,建立渤海海域的季节性洋流模型。在不同季节,根据气象条件(如降雨、温度、风速)以及由污染信息系统检测、预报的盐度变化,判断可能发生的赤潮的种类,并结合相关赤潮藻类的生态动力学模型,建立耦合的生物、化学和物理动力学模型。

此外,根据地理信息系统(GIS)和卫星遥感等技术建立赤潮环境信息和灾害信息管理系统,辅助模型预测、预警系统,并对模型预报系统进行检验和评估。渤海海域赤潮预测、预警系统初步方案如图 9-2 所示。

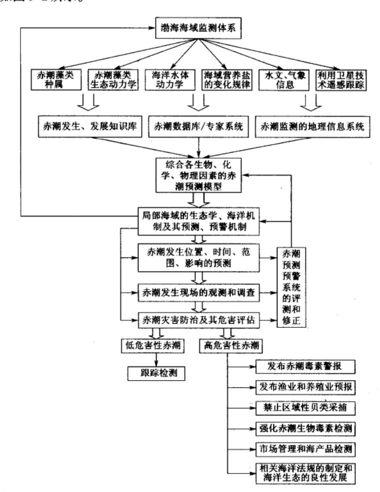


图 9-2　渤海海域赤潮预测、预警系统初步方案

根据这个监测体系和相应的监测信息,便可以建立渤海湾赤潮的数据库/专家系统。在数据库/专家系统中,根据各种赤潮藻类的生态动力学模型、海洋动力学模型,以及渤海湾海域富营养化状况变化规律和该海域的水文、气象变化规律等信息,建立生物、化学、物理因素相耦合的赤潮发生的数学模型和该海域的生态海洋学机制,为赤潮的预测、预警,赤潮灾害的防治提

供理论基础。

为了对赤潮的灾害进行防治和进行评估，应建立赤潮灾害应急响应体系。根据预测、预警系统可以加强对可能发生赤潮的海域的监测，并采取相应的防治措施，防止赤潮的发生。对于不易采取防治措施的海域，要加强对赤潮发生位置、时间、范围、影响的预测、预报，并对赤潮发生时的各项信息数据进行监测和研究，为评测和修正赤潮预测、预警系统的数学模型提供实际的数据。对于无害或低危害性赤潮，要跟踪检测，搜集发生过程中的相关数据信息；对于高危害性和毒性赤潮，要及时发布赤潮毒素警报，进行实时、实地监控，强化赤潮毒素监测，并和渔业和养殖业的工作人员取得联系，提供预报信息，采取及时有效措施，防止赤潮发生，减小赤潮灾害损失。在特定海域设定禁捕区，加强海产品的市场管理和检测，防止危害人民生命安全的事件发生。

9.1.5　赤潮预测预警系统总体设计

1.需求规定

系统的主要输入项目为：监测海域的气象、水文以及赤潮藻类生物的监测数据。

系统的主要输出项目为：目标向量的预测结果、危害的等级以及相应的赤潮应急预案。

2.运行环境

选用目前普遍使用 Windows 操作系统的 PC 平台作为本软件的开发平台，可以满足本预警系统的开发要求。采用 DELPHI7.0 作为开发环境，可以广泛利用 Windows 下的各种资源，如各种控件、OLE 对象等，其提供的数据控件、访问对象等可以方便地进行数据库系统的开发，并直接对底层进行访问。

3.设计原则

(1)系统性原则

赤潮的预测、预警作为一个复杂的巨系统，必须坚持系统性的开发和设计原则。

(2)科学的防范原则

预警是为了给人们提供风险可能发生的有效信息，指导人们及时采用相应的防范措施，因而整个预警系统必须具有严密的科学性。可以说，它是整个系统的灵魂和核心所在，因而也是整个预警系统建立过程中遵循的基本原则。

(3)实用原则

任何一种新的方法在实际应用中必须以实用作为其生存的根本要求，建筑于新方法之上的预测、预警系统也必须体现实用的原则，以便于推广和应用。

(4)两法结合的原则

目前理论界对预警系统的风险研究还不多，主要有两种基本方法：一是传统的概率分析方法，另一种是风险管理理论中的信号分析方法。此两种方法各有利弊。概率分析方法是根据所构造的模型，将各种指标数值同时代入计算发生的概率，因此具有结论明确的优点。但它不能说明赤潮发生海域的整体状况，不利于对赤潮的监控与预防。信号分析法则能为风险提供明确的监测范围和警戒区间，提示风险发生的根源，为决策者进行监控、协调并采取相应的防范措施提供了指南。但它有一个缺点，即不能明确地预测风险发生的概率，而这正是概率分析法的优点。本系统将这两种分析方法相结合，使整体结果得到优化。

9.1.6 赤潮预测预警系统结构

赤潮预测、预警系统由预测、预警信息系统,预测、预警决策系统,以及预测、预警应急系统三部分组成。系统结构如图 9-3 所示。系统登陆界面如图 9-4 所示。

本系统由三大子系统组成,分别是:预测、预警信息系统,预测、预警决策系统和预测、预警应急系统。下面分别对三个子系统的功能和结构进行说明。

1.预测、预警信息系统

预测、预警信息系统属于本系统的硬件支撑系统,为本系统提供所有的原始监测数据,该子系统由海上立体监测网络和数据传输网络组成。其主要功能在于:通过对各种赤潮发生的诱因如气象、海洋化学、生物等因素的严密监测,收集整理与赤潮形成相关的各因素信息。赤潮立体监测系统由定点连续监测系统、海上船舶监测系统、卫星遥

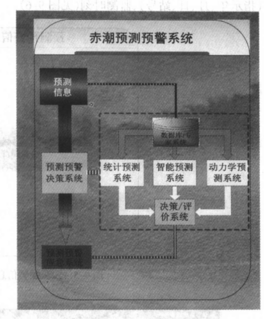


图 9-3　赤潮预测、预警系统结构框图



图 9-4　系统登陆界面

感监测系统和飞机遥感监测系统组成,其结构示意图如图 9-5 所示。

为便于调查和分析,入库内容需作统一的规定,根据需要和方便,建立了 6 类数据库,分别为水文气象库、水质库 A、水质库 B、浮游动物库、浮游植物库和底质库。共同记录项目为关键

字(指示年、月、日、站号)、监测时刻(见图 9-6)。

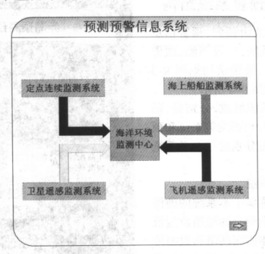


图 9-5 预测预警信息系统结构框图

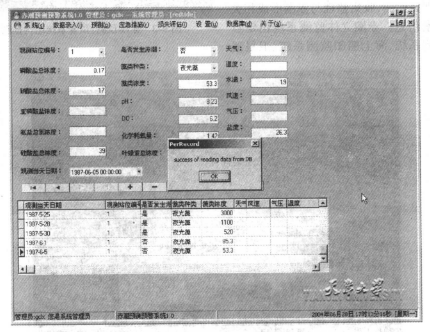


图 9-6 系统数据库

各库分别的记录项目如下。

①水文气象库为水温、水色、透明度、气温、气压、风速、风向、海况、光照、天气现象和潮汐。

②水质库 A 为常规水质监测项目,包括盐度、溶解氧、pH 值、化学耗氧量,以及硅酸盐、磷酸盐、亚硝酸盐、硝酸盐、铵盐、叶绿素 a 的浓度。

③水质库 B 为铁、铜、锌、钴、钼、硒等微量元素的含量。

④浮游动物库为网具类型、滤水量、绳长、总种数、密度、中文种名、拉丁文名、全网单种数、单种密度。

⑤浮游植物库为总种数、全网总计数、中文名,拉丁文名、生物量。

⑥底质库为底质类型、颜色、成分,以及磷酸盐、硝酸盐、亚硝酸盐、铵盐、硫化物、有机物的浓度。

2. 预测、预警决策系统

预测、预警决策系统是赤潮预测预警系统的核心组成部分。其主要功能为对所输入的数据向量采取多种方法的分析处理,输出目标向量的预测值,并对预测值进行危害评价,确定灾害等级。主要子模块包括数据库/专家系统、统计预测系统、智能预测系统、非线性动力学预测系统以及赤潮危害评价系统。其关系如图 9-7 所示。

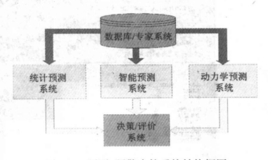


图 9-7　预测、预警决策系统结构框图

数据库/专家系统由 6 类库文件和一系列命令文件构成,其功能主要为对监测数据的收集、修改、检索、编辑、传输等。

统计分析系统提取数据库中的数据进行多种统计方法的处理,并将检验合格的模型结果存入模型库。这里的统计模块主要包括多元逐步回归模块、主成分分析模块、聚类分析模块、混合回归模块等。

智能预测系统提取数据库中的数据进行多种智能预测方法的处理,同时将检验合格的模型结果存入模型库。智能预测模块包括人工神经网络预测、遗传算法和模糊逻辑预测。

动力学预测主要通过对典型藻类建立生态动力学模型,得到赤潮生物量以及影响其增殖和聚集的各种因素的时间变化函数。该种方法将赤潮发生的过程看成一个动力学系统,考虑海洋浮游生物的生长、死亡和它们之间的捕食—被捕食关系,或者竞争同一营养资源的竞争关系,有时也包括浮游生物吸收营养的时间滞后或浮游生物死亡后转化为营养物质的营养循环再生关系等。

决策/评价系统功能为对统计预测、智能预测和动力学预测的结果进行综合评价,然后做出决策,提供预测结果。

3. 预测、预警应急系统

预测、预警应急系统针对决策系统所计算的预测结果进行危害评估,进而发布赤潮预报以及提供相应的应急对策(见图 9-8)。赤潮类型分为三类,即低危害性赤潮、中危害性赤潮和高危害性赤潮,针对不同类型的赤潮采取不同的应急对策。

危害评估模块主要用来评估由于赤潮产生而造成的经济损失(见图 9-9)。赤潮带来的经济损失包括以下 4 部分:

①渔业经济损失;

②养殖业经济损失;

③旅游业经济损失;

④健康损害经济评估。

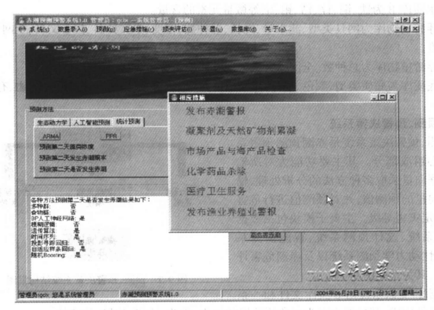


图 9-8 赤潮应急对策

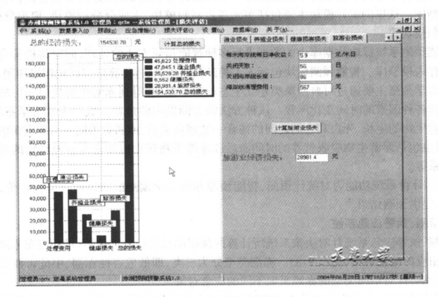


图 9-9 赤潮危害评估

应急预案模块针对决策系统和评估系统提供的赤潮危害信息提供相应的应急预案措施，其结构如图 9-10 所示。

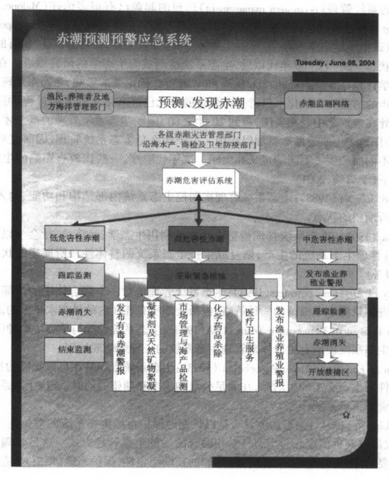


图 9-10　预测、预警应急系统结构框图

9.2　海洋生态系统管理的概念与原则

9.2.1　生态系统管理的概念

自 20 世纪下半叶以来，随着世界人口的快速增长、资源的过度开发和利用，环境污染、生态灾害、气候变化已成为威胁人类生存的严重问题。生态环境恶化是生态系统对外界干扰特别是人类活动的一种异常反应。长期以来，人类采取单一的生态管理方法，事实已经证明，这种管理方法无法从根本上解决问题。人类经过长期的探索已经认识到传统的单一追求生态系统最大产量的观点必须转向寻求生态系统可持续发展的观点，资源管理也必须从传统的单一资源管理转向综合资源管理。生态系统管理作为一种为达到持续的自然资源利用的管理方法正得到广泛的认可。

关于生态系统管理(ecosystem management)思想的起源已有很多论述(Malone,1996;Grumble,1994;Vogt et al,1997)。有关生态系统及其管理方面的整体性观点最早由Leopold提出。他认为,人类应该把土地当作一个"完整的生物体"一样加以关爱,并且尝试让"所有的齿轮"保持良好的运转状态。20世纪60年代以后,生态系统逐渐成为生态学的研究重点。在此期间,由于国际生物学计划(IBP)和Odum、Van Dyne和Watt等人的论著的影响,生态系统跨学科的研究得到了进一步的加强和系统化。尽管生态系统的概念已经有多年的发展过程,可是其定义和理论框架仍处在争议之中。在美国,直到20世纪80年代,生态系统管理的概念才真正得到了认可,并开始作为一项政策性工具加以运用。关于什么是生态系统管理,因研究对象、目的和专业角度的不同而产生了不同的定义和内涵。按年代顺序,一些比较有影响的生态系统管理定义整理如下(于贵瑞,2001)。

①Agee & Johnson(1988):生态系统管理指调控生态系统内部结构和功能、输入和输出,使其达到社会所期望的状态。

②Overbay(1992):生态系统管理指精心巧妙地利用生态学、经济学、社会学以及管理学原理,长期经营管理生态系统的生产,恢复或维持生态系统的整体性和所期望的状态、利用、产品、价值和服务。

③Society of American Foresters(1993):生态系统管理是对一个集合体中的全部森林的价值与功能配置进行景观水平维持的一种策略,包括全部所有者在内的景观水平上的协调管理。

④Forest Ecosystem Management Team ,USA(1993):生态系统管理与单一生物种的规律相反,是通过关联生态系统中所有生命体来管理生态系统的一种策略或计划。

⑤American Forest and Paper Association (1993):生态系统管理是在可以接受的社会、生物和经济风险条件下生产必需的生活品,在满足公众的需求和期望的同时,维持生态系统健康和生产力的一种资源管理系统。

⑥Grumbine等(1994):生态系统管理是以长期地保护自然生态系统的整体性为目标,将复杂的社会、政治以及价值观念与生态科学相融合的一种生态管理方式。这种管理是以顶极生态系统为主要对象,维持生态系统结构和功能的长期稳定性,保护当地(顶极)生态系统长期的整体性。

⑦Wood(1994):生态系统管理是综合利用生态的、社会的和经济学原理,经营管理生物和物理系统,以保证生态系统可持续性、自然界多样性和景观生产力。

⑧Christensen等(1996):生态系统管理是具有明确且可持续性的目标的,由政策、协议和实践活动来保证实施的一种管理活动,它在对维持生态系统组成、结构与功能所必要的生态相互作用和生态过程的最佳理解基础上从事研究和监测,以不断改进管理的适合性。

⑨Boyce and Haney(1997):生态系统管理是对生态系统进行合理经营管理以确保其可持续性。生态可持续性是指维持生态系统的长期发展趋势或过程,并避免损害或衰退。

⑩Dale等(1999):生态系统管理是考虑了组成生态系统的所有生物体及生态过程,并且是基于对生态系统的最佳理解的土地利用决策和土地管理的实践过程。

⑪任海等(2000):生态系统管理是基于对生态系统组成、结构和功能过程的最佳理解,在一定的时空尺度范围内,将人类价值和社会经济条件整合到生态系统经营中,以恢复或维持生态系统整体性和可持续性。

⑫世界保护联盟(IUCN):生态系统管理是一种物理、化学和生物学过程的控制,它们将生

物体与外界非生物环境及人为活动的调节连接在一起，以创造一个理想的生态系统状态。良好的生态系统管理将保持生态系统功能的完整性，从而避免不希望见到的生态和环境变化。

机构间生态系统管理组织将生态系统方法定义为一种维持或恢复自然生态系统和它们价值及功能的方法。它是由目标决定的，并且基于一种考虑未来的发展视角，使得生态、经济和社会的因子得以综合考虑。

9.2.2　生态系统管理的原则

Sibthorp 研讨会将生态系统管理的原则总结为两个大的原则，即指导性原则和操作性原则，各自又包括 5 项具体原则。

1. 指导性原则

(1)管理目标是社会的抉择

社会的选择将决定哪些生态系统要保护，该如何管理和如何利用。选择的基础是由需求、价值和利益来判定的。生态系统管理需要平衡来自不同利益集团的需求冲突，也要权衡那些为达到可持续发展而采取的方法。

(2)生态系统的管理必须考虑人的因素

人类是在地球上处于支配地位的物种。人类是生物生产力的最终使用者，并且随着人口数量和消费的增加，人类的影响将越来越大。人类必须协调人类自己同自然界直接或间接作用的方式。这就要求在生态系统管理中必须考虑人的因素，所采纳的生态系统管理策略也必须反映人类的需要和能力。

(3)生态系统必须在自然的分界内管理

生态系统的保护存在事实上的限制。由于物质、技术、社会的多因素的影响，人类不能想保护什么系统就保护什么系统，在谈到某一区域自然存在的生态系统要解决的问题时，考虑最多的还是社会的选择。

(4)管理必须认识到变化是必然的

由于种群内部变化、进化和扩散以及外部环境的影响，生态系统总是处于变化的状态，传统意义上的“生态平衡”实际上是不存在的，系统总是处于远离平衡态的运动之中。生态系统中广泛存在着非线性和阈值效应。这种效应造成的结果就是常常会有突变的情况发生。因此，生态系统管理者必须拒绝稳态系统的假设，着眼于那些表明环境变化和生态响应的最可能的范围方面的模型和分析。

(5)生态系统管理必须在适当的尺度内进行，保护必须利用各级保护区

生态系统管理必须在适当的尺度范围内进行才能成功。因为一个小的地方被其以外的过程和活动所影响，所以人们越来越注重于基于景观单元的系统管理。

2. 操作性原则

(1)生态系统管理需要从全球考虑，从局部着手

生态系统的最终尺度是生物圈。生物圈内各组分之间都存着相互联系。可以通过政府间的渠道来制定全球尺度的生态系统管理政策，如减少二氧化碳排放的国际公约，也可以通过国家级的组织，来制定景观尺度上的生态系统管理政策。然而，地方或个人更关心的是诸如就业、食物和健康等事情，因此，必须首先致力于解决当地由于人类压力引起的问题，然后到区域，最后到全球。

(2)生态系统管理必须寻求维持或加强生态系统结构与功能

健康的生态系统在其现有的结构下成功地实现着其功能。因此,生态系统管理必须努力维持系统结构的完整性。

(3)决策者应当以源于科学的适当工具为指导

有效的生态系统管理必须基于自然的法则。基础的物理、化学和生物学过程最终将会限制人类的欲望和行动。科学面临的挑战是掌握控制自然环境的法则,以及引起的生物学动态变化。这是指导生态系统管理者的最重要的基础。有效的工具同专家们的知识相结合,是合理的生态系统管理所必需的。科学应当承担更积极的角色,使政策制定者知道选择各种生态系统管理途径的后果。

(4)生态系统管理者必须谨慎行事

由于自然界的高度复杂性,人类认识自然界毕竟是有限的。对于人类活动对生态系统造成的影响,人们缺乏全面的了解,更无法有效地去预测生态系统的变化和演替。因此人类在谨慎进行管理的同时,还要不断地进行生物学、社会学和经济学的评估。

(5)多学科交叉的途径是必要的

生态系统有多种物理、化学、生物的和人类的组分。这就要求对生态系统的管理必须综合各个领域的专家。

9.3 赤潮灾害的综合管理与防治

9.3.1 赤潮灾害的综合管理

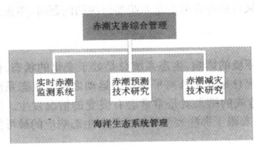


图 9-11 赤潮灾害综合管理框架

赤潮肆虐于我国和世界各国沿海,是目前国际社会共同关注的重大海洋环境问题和生态灾害,赤潮灾害已成为制约我国沿海经济社会可持续发展的重要因素。系统有效的赤潮管理已成为我国海洋资源与环境保护的迫切需要。本节从生态系统管理的观点提出了针对赤潮灾害的综合管理框架,如图 9-11 所示。

赤潮灾害综合管理框架包含两个层面的管理方案。第一个层面就是要针对赤潮这种自然灾害制定一系列相关管理政策和采取相应的措施。这个层面主要包括三方面的研究与管理内容。

(1)建立实时的赤潮监控系统

赤潮监测是赤潮防治工作的基础。在目前尚无快速有效的方法控制赤潮发生的情况下,加强赤潮监测、监视、预测、预警,是减少赤潮灾害损失的重要措施。通过监测系统的建立,可以了解赤潮灾害发生的特征,掌握赤潮发生的时间、地点以及实时状态。2003 年在法国召开了海洋生态系统及赤潮的实时监测系统会议(HABWATCH),来自各国的科学家广泛交流了目前世界上该领域的前沿技术及研究方向。本次会议对于建立实时有效的赤潮监测系统以及相

关的监测技术和监测设备作了深入的探讨和研究。在我国,国家海洋局近年来也不断加大对赤潮的监控力度,已在全国重点海域建立了33个赤潮监控区,其中北海11个,东海13个,南海9个,开展高频率、高密度的监视监测,做到监控区内赤潮发现率百分之百;成立了国家和地方相结合、专业和群众相结合的全国赤潮监视监测网络;在赤潮多发期(每年4月至10月)及频发海域,利用海洋卫星、海监飞机、海监船舶和岸基站等多种手段对赤潮发生情况开展连续监控,及时掌握全海域赤潮发生动态;归口发布赤潮信息,指导沿海的养殖活动,取得明显成效。

目前应用于赤潮灾害监测的技术主要有现场实地实时监测、海上定点浮标监测、航空监测以及卫星遥感监测等。

最通用的常规监测手段就是现场实地实时监测,主要通过船舶平台开展现场采样来实现生物、化学以及物理因子的监测,缺点在于由于分析手段繁琐,取得结果的周期长、速度慢,因此不适合赤潮的实时监测和预测。

海上浮标自动监测技术是在20世纪90年代兴起的一种监测技术。它由于可以提供连续的、实时的以及相对“廉价”的监测数据而有着极大的应用前景。赤潮自动监测系统的研制技术主要包括浮标系统设计、现场采样、藻类的自动分析、远程控制及通信等环节。

航空预测是采用直升机等平台实现赤潮的监测及预警工作。其优点在于可以迅速取样、获得同步资料,覆盖面大以及分辨率高,这是发达国家监测赤潮等重要手段;缺点在于使用费用及其昂贵而导致实用性差,不能作为及时监测和预报的工具。

卫星遥感技术由于具有快速、同步和大范围监测海洋的能力,已被广泛应用于赤潮的监测,美国NOAA从1999年开始利用卫星遥感图像、海洋和气象观测资料,在佛罗里达西海岸开展了赤潮生成条件和赤潮漂移路径的预报。我国也在这方面开展了很多的研究工作。卫星遥感技术的缺点在于观测间隔与空间分辨率难以两全,而且易受天气云层影响。

该内容的另一方面是关于赤潮灾害相关制度的建设。当前需要制定全国性的海洋赤潮监测中长期计划和监测、预测技术规范,规范赤潮监测预测工作,国家海洋局已于2005年5月颁发了最新的《赤潮监测技术规程》(HY/T 069－2005);拟建专家顾问组,提供技术支持和咨询;开展有毒赤潮早期诊断工作,开展贝类毒素检测和赤潮生物分类有关工作,保证赤潮信息的全面、可靠和正确。最后是要加强对海洋赤潮信息的管理工作。对全国的赤潮灾害信息采集、信息传输、数据库建设、信息产品制作等实行统一的规范化管理;实施信息资料的精度和质量控制;在信息传输方面,建立全国赤潮灾害信息传输网络体系,保证赤潮灾害监测信息和预警预报信息双向传输的可靠性和时效性。国家海洋局于2002年1月颁布了《海洋赤潮信息管理暂行规定》。

我国海域辽阔,海岸线漫长,仅凭国家和有关部门力量,对海洋进行全国监视很难做到。有必要把目前各主管海洋环境的单位、沿海广大居民、渔业捕捞船、海上生产部门和社会各方面力量组织起来,开展专业和群众相结合的海洋监视活动,扩大监视海洋的覆盖面,及时获取赤潮和与赤潮有密切关系的污染信息。监视网络组织部门可根据工作计划,组织各方面的力量对赤潮进行全面监视。特别是赤潮多发区,近岸水域,海水养殖区和江河入海口水域要进行严密监视,及时获取赤潮信息。一旦发现赤潮和赤潮征兆,监视网络机构可及时通知有关部门,有组织有计划地进行跟踪监视监测,提出治理措施,千方百计减少赤潮的危害。

最后还要积极参与国际赤潮的研究组织和计划。

(2)加强赤潮预测预报技术的研究

准确及时地预测预报赤潮是减少赤潮损失的最有效措施。因此,为使赤潮灾害控制在最小限度,减少损失,必须积极开展赤潮预报服务。众所周知,赤潮发生涉及生物、化学、水文、气象以及海洋地质等众多因素,目前还没有较完善的预报模式适应于预报服务。因此,应加强赤潮预报模式的研究,了解赤潮的发生、发展和消衰机理。我国较早地开展了赤潮灾害问题的研究。较大的研究项目包括:国家自然科学基金"七五"重大项目"中国东南沿海赤潮发生机理研究",国家自然科学基金"九五"重大项目"中国沿海典型养殖区有害赤潮发生动力学及防治机理研究"以及国家科技部于2001年资助立项的国家重点基础研究(973)项目《我国近海有害赤潮发生的生态学、海洋学机制》。这些项目的研究成果使得我国的赤潮灾害研究在国际上取得一席之地。目前国际上主要的赤潮研究计划包括:政府间海委会(IOC)和国际海洋研究委员会(SCOR)于1998年10月共同发起组织的"全球有害赤潮的生态学和海洋学研究计划"(GEOHAB, Global Ecology and Oceanography of Harmful Algal Blooms)、美国于1995年投巨资成立的赤潮生态学(ECOHAB)全国规划以及欧洲共同体提出的欧洲赤潮研究规划(EUROHAB, European Harmful Algal Blooms)。由于赤潮灾害的特殊性,一个国家的赤潮灾害同时也会成为另一个国家甚至多个国家的灾害。因此,赤潮的国际化合作显得尤为重要。目前,较为大型的国际研究计划已经建立了较为成熟的合作计划(见图9-12)。

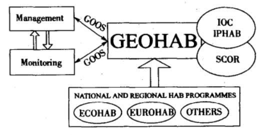


图9-12 国际赤潮合作计划

关于赤潮的国际会议也举行了多届,2004年在南非的开普敦举行了第十一届国际赤潮会议。

(3)积极开展赤潮减灾技术的研究

当赤潮发生以后,人们所能采取的办法也就是尽量减少赤潮灾害所带来的损失。一方面,需要建立赤潮应急预案制度。国家海洋局可以作为该行动方案的执行中心,负责协调各相关部门的工作。当赤潮预测预警系统发布即将有赤潮暴发的信息时,该行动中心应该迅速将赤潮发生的时间、地点、规模、藻类毒素类型以及相关的灾害等级通知相关渔业管理部门及养殖者。另一方面就是要加强赤潮防治技术的研究。

赤潮灾害综合管理框架的第二个层面就是基于海洋生态系统的管理。赤潮灾害其实是海洋生态系统"生病"的一种表现。因此,最根本的方法就是加强海洋生态系统的管理,使得海洋生态系统可以持续健康稳定地存在。

海洋生态系统的许多组分在不停地运动,并且具有极高的非线性,这些系统所支撑的食物网还处于一种无序状态。因此就给海洋生态系统的管理带来了一定的风险。复杂自然系统也许会以一种非线形方式对变化做出反应:小的变化也许会在一个生态系统中引起激烈的病理

行为。虽然关于大尺度海洋环境是否是在这样一个刀刃上维持平衡还是一个有争论的问题，但对北太平洋中的物理和生物数据来源所作的一个新的评估表明，生物变量表现出人们所担心的"非线性"行为。在实践中，这一结果表明在海洋生态系统管理中应考虑采取较为谨慎的措施。

目前国际上存在的海洋生态系统管理模式包括：大海洋生态系统（large marine ecosystem, LME）、综合海岸管理（integrated coastal management, ICM）以及海洋保护区（marine protected area, MPA）。但是，这些管理模式还比较分散，没有组合在一起构成真正的以生态系统为基础的管理。《联合国环境规划的区域海域计划》为实现真正以生态系统为基础的管理，提出了把上述三者合而为一的管理模式，不过进展缓慢。

海洋生态系统管理与赤潮综合管理的切合点在于加强对于海洋污染物排放的控制，从而建立一个良好的海洋生态环境。赤潮的发生与环境污染尤其是污染物的连续不断地输入存在直接关系。在赤潮多发区，为了控制海域的富营养化，应该建立以海洋环境容量为基础的污染物入海总量控制标准，合理分配与赤潮暴发相关的污染因子的排放总量；制定相关的政策和措施，控制沿海地区和流域的氮、磷施用量和排放量；建立沿海陆域氮、磷和有机污染物的控制机制；加大污染源的治理和区域污染整治的力度；加速沿海陆域的产业结构调整和城市污水处理系统的建设，通过产业结构性调整，逐步改变近岸海域污染状况。另一方面是要加强养殖管理，控制养殖自身污染，具体包括：合理规划沿海海水养殖空间布局和养殖结构；调整养殖种类和规模；改进投喂性养殖的饵料利用效率；开发并推广有机污染物生物降解技术，有效控制养殖自身污染，减少养殖区赤潮发生机会。张利民等(2004)提出了赤潮灾害管理的 8 项建议：

①开展"中国赤潮灾害的预警预报服务"；

②加强赤潮灾害的信息管理；

③加强赤潮贝毒管理；

④规范赤潮灾害损失的评估管理；

⑤加强法制管理；

⑥做好赤潮科普知识的宣传教育与培训工作；

⑦制定赤潮监测的应急监测监视预案；

⑧建立健全赤潮灾害发生后的抗灾措施等。

9.3.2　赤潮的防治

随着赤潮现象在世界范围内的日趋频繁，其危害也日益严重。如何治理赤潮，降低其对海洋环境、水产养殖业及人类健康的危害，已成为人们普遍关注的一个大问题。

到目前为止，国内外提出的赤潮治理方法有多种，但真正能付诸应用的却寥寥无几。这主要是因为要使一种方法得到认可，必须符合"高效、无毒、价廉、易得"的要求，而目前很难找出一种方法完全符合上述要求。但在水产养殖区内发生赤潮的紧急情况下，仍然有一些应急措施可以采用。

对于小型的网箱养殖，可以采用拖曳法来对付赤潮，也就是将养殖网箱从赤潮水体转移至安全水域。这种方法简单易行，但前提条件必须是赤潮仅在局部区域发生，而且在周围容易找到安全的"避难区"。隔离法是另一种比较可行的应急措施。这种方法主要是通过使用一种不渗透的材料将养殖网箱与周围的赤潮水隔离起来以降低赤潮的危害。同时应注意给网箱充

气,防止鱼类缺氧。

对于大面积的赤潮治理,现在国际上公认的一种方法是撒播黏土法。黏土是一种天然矿物,具有来源丰富、成本低、无污染的优点。中国科学院海洋研究所在国际上率先将絮凝作用理论应用于黏土治理赤潮的机理与方法研究,提出了提高黏土矿物絮凝能力的表面改性理论,并分别通过"插入法"和"吸附法"制备出絮凝效率较原土高几十倍的改性黏土,去除率达90%以上,能够有效地抑制有害赤潮的发生,成为目前国际上普遍借鉴的技术与方法。化学药品杀除法也是使用较早和发展较快的一种方法。这种方法就是利用特定化学药品直接杀死赤潮藻类。但是对于这种方法,很易于造成海洋的二次污染,因此国际上要求用于杀死赤潮生物的化学药品必须具有以下几个特点:首先,可以在较低浓度的情况下迅速杀死赤潮藻类;其次,这类化学药品在海水中易于分解和消失;最后就是这些化学药品必须对其他的海洋生物影响小。还有一种化学方法就是凝聚剂沉淀法。这种方法主要是利用凝聚剂使赤潮生物凝集、沉降。现在用的比较多的凝聚剂有:无机凝聚剂、表面活性剂和高分子凝聚剂。

另外,还有人提出用生物方法治理赤潮,即通过滤食性贝类、浮游动物、藻类、细菌或病毒等捕食或杀死赤潮藻。但目前这种方法还处于实验室研究阶段,进一步的应用还有待于研究。根据生态系统食物链的关系,引入赤潮藻类的天敌来防治赤潮的形成也是一种比较有效的方法。还有的方法将无毒的赤潮藻类当作一种可以利用的资源加以利用,变废为宝。

附录1　第6章用到的主要程序

1.读入数据及标准化

```
source("standard.r")
red < - scan(file = "e:/redtide/red.txt", what = list(double(0), double(0),
double(0), double(0), double(0), double(0), double(0), double(0),
double(0), double(0), double(0), double(0), double(0), double(0),
double(0), double(0), ), skip = 1);
facname < - c("sr", "ws", "p", "t", "pH", "sd", "COD", "DO", "PO4",
"Si", "NO3", "L", "month", "chla", "NO2", "NH4"); names(red) < - facname;
red < - as.data.frame(red);
for(i in 1:length(red)) {
tmp < - ! is.na.data.frame(red); red < - red[tmp[,i],]; }
ld < - red $ L;
names(ld) < - "L" fac < - red[ - c(12,13)]; fac[[1]] < - factor(fac[[1]])
cato < - data.frame(sun = rep(0, length(fac[[1]])), cloudy = rep(0, length(fac[[1]])),
                    rainy = rep(0, length(fac[[1]])));
for(i in 1:length(fac[[1]])){
if(fac[i,1] = = 1){ cato $ sun[i] = 1 }
else if(fac[i,1] = = 3){ cato $ cloudy[i] = 1 }
else cato $ rainy[i] = 1 }
b < - cbind(cato, standard(fac[2:14]) $ x)
sdld < - standard(ld) $ x
sam < - c(5,19,59); ldfit < - sdld[ - sam]; facfit < - b[ - sam, ];
xpld < - sdld[sam]; xpfac < - b[sam, ];
```

2.回归树的随机梯度 Boosting 分析

```
library(gbm);
gbm1 < - gbm.fit(facfit, ldfit, # dataset
    var.monotone = rep(0,16),  # -1: monotone decrease,
    distribution = "gaussian",      # bernoulli, adaboost, gaussian;
                                    # poisson, and coxph available
    n.trees = 2000,                 # number of trees
    shrinkage = 0.001,              # shrinkage or learning rate,
                                    # 0.001 to 0.1 usually work
    interaction.depth = 3,          # 1: additive model,
                                    # 2: two-way interactions, etc.
    bag.fraction = 0.5,             # subsampling fraction, 0.5 is probably best
```

```
    train.fraction = 1,          # fraction of data for training,
                                   # first train.fraction * N used for training
    n.minobsinnode = 10,         # minimum total weight needed in each node
    keep.data = TRUE,              # keep a copy of the dataset with the object
    verbose = TRUE)                # print out progress
best.iter <- gbm.perf(gbm1,method = "OOB")
f.predict <- predict.gbm(gbm1,xpfac,best.iter)
print(f.predict)
print(xpld)
print((xpld-f.predict)/xpld)
pretty.gbm.tree(gbm1,best.iter)
summary(gbm1,n.trees = best.iter)
oneway.test(l ~ sr, data = data.frame(l = sdld,sr = fac[[1]]))
anova(lm(l ~ sr,data = data.frame(l = sdld,sr = fac[[1]])))
par(mfrow = c(2,2)) plot.gbm(gbm1,5,best.iter)
plot.gbm(gbm1,11,best.iter) plot.gbm(gbm1,7,best.iter)
plot.gbm(gbm1,10,best.iter)
twodep <- plot.gbm(gbm1,c(5,11),best.iter,return.grid = TRUE)
wireframe(y ~ p * PO4, data = twodep,
          scales = list(arrows = FALSE),
          drape = TRUE, colorkey = TRUE,
          screen = list(z = 30, x = -60))
twodep <- plot.gbm(gbm1,c(7,10),best.iter,return.grid = TRUE)
wireframe(y ~ pH * DO, data = twodep,
          scales = list(arrows = FALSE),
          drape = TRUE, colorkey = TRUE,
          screen = list(z = 30, x = -60))
twodep <- plot.gbm(gbm1,c(11,7),best.iter,return.grid = TRUE)
wireframe(y ~ pH * PO4, data = twodep,
          scales = list(arrows = FALSE),
          drape = TRUE, colorkey = TRUE,
          screen = list(z = 30, x = -60))
```

3.多元自适应样条回归

```
library(mda)
fit1 <- mars(facfit,ldfit,degree = length(facfit));
f.predict <- predict(fit1,xpfac) print(f.predict) print(xpld)
print((xpld-f.predict)/xpld)
```

4.支持向量机回归

```
library(e1071)
```

```
svm1 < - svm(facfit,ldfit); summary(svml);
f.predict < - predict(svm1,xpfac) print(f.predict) print(xpld)
print((xpld-f.predict)/xpld)
```

5.人工神经网络

```
library(nnet)
ann1 < - nnet(facfit,ldfit, size = 2, rang = 0.1,
            decay = 5e-4, maxit = 200)
f.predict < - predict(ann1,xpfac) print(f.predict) print(xpld)
print((xpld-f.predict)/xpld)
```

6.回归树预测

```
library(tree)
fitdata < - data.frame(L = ldfit,facfit)
tree1 < - tree(L ~ ., fitdata) plot(print(tree1))
tree1.cv < - cv.tree(tree1,,prune.tree)
for(i in 2:5)   tree1.cv $ dev < - tree1.cv $ dev +
   cv.tree(tree1,, prune.tree) $ dev
tree1.cv $ dev < - tree1.cv $ dev/5 plot(tree1.cv)
f.predict < - predict(tree1,xpfac) print(f.predict) print(xpld)
print((xpld-f.predict)/xpld)
```

7.投影寻踪回归

```
red.ppr < - ppr(x = facfit,y = ldfit,nterms = 2, max.terms
 = 7,sm.method = 'gcvspline');
f.predict < - predict(red.ppr,xpfac) print(f.predict) print(xpld)
print((xpld-f.predict)/xpld)
```

8.自定义标准化函数

```
standard < - function(newdata)
{
    if(missing(newdata)) stop('input origin data')
        x < - as.matrix(newdata)
        m < - nrow(x)
        n < - ncol(x)
        xmin < - rep(0,n)
        xmax < - rep(0,n)
        for( i in 1:n)
        {
          xmin[i] < - min(x[,i])
          xmax[i] < - max(x[,i])
         x[,i] < - (x[,i] - xmin[i])/(xmax[i] - xmin[i])
         }
```

```
    result <- list(x = x, xmin = xmin, xmax = xmax)
    return(result)
}
```

附录2　第8章数据 redtide.data($10^{-5}\cdot L^{-1}$)

3.929 4
3.651 0
4.304 2
3.669 8
4.962 4
3.275 5
3.706 7
3.303 5
4.346 4
3.132 8
3.996 6
3.545 4
5.647 6
2.931 5
4.190 7
3.058 4
3.363 0
3.317 5
4.385 9
4.903 8
3.756 5
3.352 7
4.711 1
4.237 8
3.958 3
4.518 9
3.328 7
4.000 0
3.578 1
3.878 2
2.937 4
4.406 4
3.372 7
3.191 7
3.776 3
3.536 0
3.650 8
4.074 3
3.885 2
2.839 5
3.389 0
3.349 4
4.272 6
2.718 7
4.400 5
4.634 0
3.293 7
3.505 4
3.583 9
3.664 3
4.750 6
4.156 0
4.665 1
2.708 2
3.956 8
4.128 4
3.550 6
5.134 8
2.816 3
2.885 2
3.996 5
3.229 4
4.375 8
3.277 4
3.142 3
4.858 4
3.424 8
3.750 3
4.386 6
3.501 6
4.538 8
3.946 8
3.705 1
3.695 2
3.976 7
3.380 1
2.542 1
4.409 3
3.936 6
3.596 5
3.252 1
2.675 8
2.698 2
3.114 4
3.547 5
4.961 5
3.958 2
3.153 4
3.711 6
3.100 8
4.365 4
4.342 7
4.263 9
4.229 4
3.395 1
3.589 5
4.011 3
3.605 1
4.143 3
3.311 0

附录3 第8章用到的主要程序

1.求核函数值的函数:kernel.value

```
"kernel.value" < -
function(xdat,b)
{
        ub < - NULL
        Inte < - list()
        xb < - redtide.data
        n < - length(xb)
        m < - length(xdat)
        y < - matrix(0, ncol = m, nrow = 1)
        for(jb in 1:m) {
                count < - 0
                k < - 0
                for(i in 1:n) {
                        ub < - (xdat[jb] - xb[i])/b
                        if(ub > = - 1&&ub < = 1) {
                                k < - 0.75 * (1 - ub^2)
                        }
                        else {
                                k < - 0
                        }
                        count < - count + k
                }
                y[jb] < - count/(n * b)
        }
        Inte $ ker < - y
        print(Inte[c(1)])
        invisible(Inte)
}
```

2.求极大似然估计的函数:gpd.fit

```
"gpd.fit" < -
function(xdat, ufun, npy = 365, ydat = NULL, sigl = NULL, shl = NULL, siglink
 = identity, shlink = identity)
{
 #
```

```
# obtains mles etc for gpd model
#
z <- list()
z$trans <- F
if(is.function(ufun)) {
z$trans <- T
u <- ufun(1:length(xdat))
}
else {
if(length(ufun) == length(xdat)) {
u <- ufun
}
else u <- rep(ufun, length(xdat))
}
xdatu <- xdat[xdat > u]
xind <- (1:length(xdat))[xdat > u]
u <- u[xind] #
# if routine fails try changing initialization values
# of in1 and in2
#
in2 <- sqrt((6 * var(xdat))/pi)
in1 <- mean(xdat, na.rm = T) - 0.57722 * in2
if(is.null(sigl)) {
sigmat <- as.matrix(rep(1, length(xdatu)))
siginit <- in2
}
else {
z$trans <- T
sigmat <- cbind(rep(1, length(xdatu)), ydat[xind, sigl])
siginit <- c(in2, rep(0, length(sigl)))
}
if(is.null(shl)) {
shmat <- as.matrix(rep(1, length(xdatu)))
shinit <- 0.1
}
else {
z$trans <- T
shmat <- cbind(rep(1, length(xdatu)), ydat[xind, shl])
shinit <- c(0.1, rep(0, length(shl)))
```

```
}
init <- c(siginit, shinit)
npsc <- length(sigl) + 1
npsh <- length(shl) + 1
assign("xdat", xdat, frame = 1)
assign("sigmat", sigmat, frame = 1)
assign("sigl", sigl, frame = 1)
assign("siglink", siglink, frame = 1)
assign("shmat", shmat, frame = 1)
assign("shl", shl, frame = 1)
assign("shlink", shlink, frame = 1)
assign("xdatu", xdatu, frame = 1)
assign("xind", xind, frame = 1)
assign("u", u, frame = 1)
assign("n", length(xdat), frame = 1)
assign("npy", npy, frame = 1)
z$model <- list(sigl, shl)
z$link <- deparse(substitute(c(siglink, shlink)))
if(is.function(ufun))
z$threshold <- deparse(substitute(ufun))
else z$threshold <- ufun
z$nexc <- length(xdatu)
z$data <- xdatu # cat(gpd.lik(init), fill = T)
x <- nlmin(gpd.lik, init, max.fcal = 1000, max.iter = 950, print = 0, d
= c(rep(1/var(xdat), npsc), rep(1, npsh)))
npsc <- length(sigl) + 1
sc <- siglink(sigmat %*% (x$x[seq(1, length = npsc)]))
npsh <- length(shl) + 1
xi <- shlink(shmat %*% (x$x[seq(npsc + 1, length = npsh)]))
z$conv <- x$converged
z$nllh <- gpd.lik(x$x)
h <- hess(gpd.lik, x$x)
z$vals <- cbind(sc, xi, u)
if(z$trans) {
z$data <- - log(as.vector((1 + (xi * (xdatu - u))/sc)^( - 1/xi))
)
}
z$mle <- x$x
z$rate <- length(xdatu)/length(xdat)
```

```
z $ se <- sqrt(diag(h))
z $ cov <- h
z $ n <- n
z $ npy <- npy
z $ xdata <- xdat
if(z $ trans)
print(z[c(2, 3)])
if(length(z[[4]]) == 1)
print(z[4])
print(z[c(5, 7)])
if(z $ conv)
print(z[c(8, 10, 11, 12)])
invisible(z)
}
```

3.画模型诊断图的函数:gpd.diag

```
"gpd.diag" <-
function(z)
{
 #
 # produces diagnostic plots for gpd model
 # estimated using gpd.fit with output stored in z
 #
n <- length(z $ data)
x <- (1:n)/(n + 1)
{
if(z $ trans) {
par(mfrow = c(1, 2))
plot(x, 1 - exp( - sort(z $ data)), xlab = "Empirical",
ylab = "Model")
abline(0, 1, col = 4)
title("Residual Probability Plot")
plot( - log(1 - x), sort(z $ data), ylab = "Empirical",
xlab = "Model")
abline(0, 1, col = 4)
title("Residual Quantile Plot (Exptl. Scale)")
}
else {
par(mfrow = c(2, 2))
gpd.pp(z $ mle, z $ threshold, z $ data)
```

```
gpd.qq(z$mle, z$threshold, z$data)
gpd.rl(z$mle, z$threshold, z$rate, z$n, z$npy, z$cov, z$
data, z$xdata)
gpd.his(z$mle, z$threshold, z$data)
}
invisible()
}
par(mfrow = c(1, 1))
}
```

参考文献

[1] 蔡如钰．夜光藻密度的人工神经网络预测模型[J]．中国环境监测，2001，17(6):52－55．

[2] 曹建福，韩崇昭，方洋旺．非线性系统理论及应用[M]．西安:西安交通大学出版社，2001．

[3] 曹庆杰．非线性系统随机振动与分叉理论研究[D]．天津：天津大学，1991．

[4] 常战英．人为的灾害——红潮[J]．工业安全与环保，2002，28(7):29－31．

[5] 陈孝麟．围隔生态系统内富营养化引起赤潮的初步研究[J]．海洋与湖沼，1992，23(3)：312－317．

[6] 陈予恕,唐云．非线性动力学中的现代分析方法[M]．北京:科学出版社，1992．

[7] 陈予恕．非线性振动系统的分岔和混沌理论[M]．北京:高等教育出版社，1993．

[8] 程振波．河北省黄骅市沿海赤潮的初步研究[J]．海洋通报，1992，11(4)：103－106．

[9] 崔伟东，周志华．支持向量机研究[J]．计算机工程与应用，2001(1)：58－61．

[10] 单志欣．渤海赤潮防治对策的探讨[J]．海洋渔业，1992，14(1)：26－28．

[11] 冯士筰，李凤岐，李少菁．海洋科学导论[M]．北京：高等教育出版社，1999．

[12] 冯剑丰．渤海赤潮生态系统动力学与预测研究[D]．天津;天津大学，2004．

[13] 冯剑丰，王洪礼．渤海赤潮预测预警系统研究[J]．东北师范大学学报，2003(7)：234－235．

[14] 高素兰．营养盐和微量元素与黄骅赤潮的相关性[J]．黄渤海海洋，1997，15(2)：59－63．

[15] 龚强，张淑杰．对 1998 年渤海赤潮的发生与气象条件的研究：渤海赤潮灾害监测与评估研究文集，2000[C]．沈阳：沈阳区域气象中心研究所，2000．

[16] 龚强，韩玺山，陈鹏狮．气象卫星遥感在监测辽宁近海赤潮中的应用[J]．辽宁气象，2000，3：25－26．

[17] 谷颖，项有堂．象山港海域富营养化与赤潮的关系[J]．海洋环境科学，2002，21(3)：67－69．

[18] 顾元宪，陈飙松，张洪武．结构动力方程的增维精细时程积分法[J]．力学学报，2000，32(4)：447－456．．

[19] 管玉平，林一骅．赤潮数值研究的有关问题[J]．海洋预报，1996，13(4)：27－30．

[20] 郭皓．有害藻华监视监测实施细则：渤海赤潮灾害监测与评估研究文集[C]．沈阳：沈阳区域气象中心研究所，2000．

[21] 洪君超，吕颂辉．中肋骨条藻赤潮发生[J]．暨南大学学报:自然科学学与医学版，1995，16(1)，131－136．

[22] 洪再吉，韦博成，等．非线性回归模型[M]．南京：南京大学出版社，1986．

[23] 侯振挺，刘再明．数学生态学随机模型[J]．生物数学学报，2000，15(3)：301－307．

[24] 胡岗．随机力与非线性系统[M]．上海：上海科学技术出版社，1995．

[25] 胡岗，萧井华，郑志刚．混沌控制[M]．上海：上海科技教育出版社，2000.
[26] 华泽爱．赤潮灾害[M]．北京：海洋出版社，1994.
[27] 黄承正．南海赤潮数据库和管理库[J]．海洋信息，1993 (11)：11 - 13.
[28] 黄象鼎，曾钟钢，马亚南．非线性数值分析[M]．武汉：武汉大学出版社，2000.
[29] 黄小平，黄良民，谭烨辉，等．近海赤潮发生与环境条件之间的关系[J]，海洋环境科学，2002，21(4)：63 - 69.
[30] 黄晓航，史冬梅．赤潮发生机理研究及海洋原甲藻的氮营养生理特征[J]．海洋与湖沼，1997，28(1)：33 - 38.
[31] 黄秀清，蒋晓山．长江口海区一次骨条藻赤潮发生过程的多元分析[J]．海洋环境科学，2000，19(4)：1 - 5.
[32] 黄秀清，蒋晓山．长江口中肋骨条藻发生过程环境要素分析：水温、盐度、DO 和 pH 特征[J]．海洋通报，1994，13(4)：35 - 40.
[33] 黄奕华，楚建华，齐雨藻．南海大鹏湾盐田海域骨条藻数量的多元分析[J]．海洋和湖泊，1997，28(2)：121 - 126.
[34] 霍文毅，郝建华，俞志明，等．有害赤潮数值分析研究进展[J]．海洋与湖沼，1999，30：568 - 574.
[35] 姬水旺，姬旺田．支持向量机训练算法综述[J]．微机发展，2004，14(1)：18 - 20.
[36] 暨卫东，许昆灿，陈砚．厦门港赤潮发生区营养盐含量变化与水文、生物因素的关系：厦门港赤潮调查研究论文集[C]．厦门：国家海洋局第三海洋研究所，1993.
[37] 蒋晓山，黄秀清．水温、盐度、DO、pH 与赤潮消长的关系[J]．海洋信息，1991，(10)：32 - 36.
[38] 焦守莉．遥感技术用于监测海水水质[J]．北京测绘，1999(4)：44 - 46.
[39] 矫晓阳．透明度作为赤潮预警监测参数的初步研究[J]．海洋环境科学，2001，20(1)：27 - 31.
[40] 李超．渤海赤潮非线性预测预警系统研究[D]．天津：天津大学，2002.
[41] 李胜朋，王洪礼，冯剑丰．渤海湾赤潮藻类浓度与环境因子的非线性相关分析[J]．海洋技术，2004，23(3)：82 - 84.
[42] 李铁，史致丽，李俊，张金良．营养盐对中肋骨条藻和新月菱形藻部分生化组成和性质的影响[J]．海洋与湖沼，2000，31(3)：239 - 244.
[43] 李庆扬，王能超，易大义．数值分析[M]．第 4 版．北京：清华大学出版社，2001.
[44] 梁吉昌，安敦．渤海湾南部近岸海域 1989 年赤潮的调查与研究：海洋环境监测文集[C]．天津：天津市环保局，1995.
[45] 梁舜华，张红标．大鹏湾盐田水域赤潮期间水质锰的变化规律[J]．海洋通报，1993，12(2)：13 - 16.
[46] 廖晓昕．动力系统的稳定性和应用[M]．北京：国防工业出版社，2000.
[47] 林祖享，梁舜华．探讨运用多元回归分析预报赤潮[J]．海洋环境科学，2002，21(3)：1 - 4.
[48] 刘彬昌．黄骅近海及滩涂水域环境与赤潮形成初探[J]．海洋环境科学，1993，12(3)：69 - 75.

[49] 刘彬昌，张守法．黄骅赤潮的水化学环境[J]．海洋科学，1991 (6)：35－38．

[50] 刘次华．随机过程[M]．武汉：华中理工大学出版社，2000．

[51] 刘嘉焜．应用随机过程[M]．北京：科学出版社，2000．

[52] 刘江华，程君实．支持向量机训练算法综述[J]．信息与控制，2002，31(1)：45－50．

[53] 刘令梅．赤潮的监测技术和防治措施[J]．海洋技术，1998，17(3)：58－65．

[54] 刘同明．数据挖掘技术及其应用[M]．北京：国防工业出版社，2001．

[55] 刘先斌，陈大鹏，陈虬．实噪声参激一类余维 2 分叉系统的最大 Lyapunov 指数(Ⅰ)[J]．应用数学和力学，1999，20(9)：902－912．

[56] 刘先斌，陈大鹏，陈虬．实噪声参激一类余维 2 分叉系统的最大 Lyapunov 指数(Ⅱ)[J]．应用数学和力学，1999，20(10)：997－1003．

[57] 刘先斌，陈虬．实噪声参激 Hopf 分叉系统研究[J]．力学进展，1997，29(2)：158－166．

[58] 刘先斌，陈虬，陈大鹏．白噪声参激 Hopf 分叉系统的两次分叉研究[J]．应用数学和力学，1997，18(9)：779－788．

[59] 刘先斌，陈虬，陈大鹏．非线性随机动力系统的稳定性和分岔研究．力学进展，1996，26(4)：437－452．

[60] 刘先斌．一类随机分叉系统概率 1 分叉研究[J]．固体力学学报，2001，22(3)：297－302．

[61] 刘曾荣．混沌微扰判据[M]．上海：上海科技教育出版社，1994．

[62] 刘正荣，李继彬．哈密顿系统与时滞微分方程的周期解[M]．北京：科学出版社，2000．

[63] 柳回春，马树元．支持向量机的研究现状[J]．中国图像图形学报，2002，7(6)：618－623．

[64] 陆斗定．虾塘赤潮灾害的防治对策：赤潮监测与预报研究论文选编，2000[C]．杭州：国家海洋局第二海洋研究所．

[65] 陆启韶．常微分方程的定性方法和分岔[M]．北京：北京航空航天大学出版社，1989．

[66] 陆启韶．分岔与奇异性[M]．上海：上海科技教育出版社，1995．

[67] 陆文聪，杨柳．支持向量机算法用于夜光藻密度建模[J]．计算机与应用化学，2002，19(2)：706－708．

[68] 罗雪晖，李霞．支持向量机及其应用研究[J]．深圳大学学报:理工版，2003，20(3)：40－46．

[69] 茆诗松．回归分析及其试验设计[M]．上海：华东师范大学出版社，1981．

[70] 欧俊豪．应用概率统计[M]．天津：天津大学出版社，2000．

[71] 彭仕政，蔡绍洪，唐延林．非线性系统的随机过程[M]．贵阳：贵州人民出版社，2001．

[72] 齐雨藻，楚建华．诱发海洋褐胞藻赤潮的环境因素分析[J]．海洋通报，1993，12(2)：30－34．

[73] 邱德全，林永水，江静波．海洋有毒甲藻研究[J]．南海研究与开发，1995，9：37－46．

[74] 裘春航，吕和祥，蔡志勤．在哈密顿体系下分析非线性动力学问题[J]．计算力学学报，2000，17(2)：127－132．

[75] 裘宗燕．Mathematica 数学软件系统的应用及其程序设计[M]．北京：北京大学出版社，1994．

[76] 任荣珠，梁源高．莱州湾西部海域赤潮分析[J]．海洋通报，1993，12(4)：116－118.
[77] 戎海武，方同．二阶线性随机微分方程的渐近稳定性[J]．应用力学学报，1996，13(3)：72－78.
[78] 戎海武，孟光，王向东，等．FPK 方程的近似闭合解[J]．应用力学学报，2003，20(3)：95－98.
[79] 戎海武，孟光，徐伟，等．二阶随机参激系统的 Lyapunov 指数和稳定性[J]．振动工程学报，2002，15(3)：295－299.
[80] 戎海武，孟光，徐伟，等．二自由度耦合线性随机系统的最大 Lyapunov 指数和稳定性[J]．应用力学学报，2000，17(3)：46－53.
[81] 戎海武，王命宇，方同．二阶随机系统的 Lyapunov 指数与稳定性[J]．振动工程学报，1997，10(2)：213－218.
[82] 戎海武，王命宇，方同．随机 ARNOLD 系统的稳定性与分叉[J]．应用力学学报，1996，13(4)：112－116.
[83] 戎海武，徐伟，方同．二自由度耦合非线性随机系统的最大 Lyapunov 指数和稳定性[J]．应用力学学报，1998，15(1)：22－29.
[84] 戎海武，徐伟，方同．随机分叉定义小议[J]．广西科学，1997，4(1)：15－19.
[85] 沈非．渤海赤潮预测预警研究[D]．天津：天津大学，2003.
[86] 沈非，王洪礼，冯剑丰．知识发现在赤潮预测预警系统研究中的应用[J]．海洋技术，2004，23(3)：82－84.
[87] 沈世镒．神经网络系统理论及其应用[M]．北京：科学出版社，2000.
[88] 史忠植．知识发现[M]．北京：清华大学出版社，2002.
[89] 孙德山，吴今培．基于 SVR 的混沌时间序列预测[J]．计算机工程与应用，2004，12(2)：54－56.
[90] 孙冷，黄朝迎．赤潮及其影响[J]．灾害学，1999，14：51－54.
[91] 孙强，杨燕明，顾德宇，等．Sea Wifs 探测 1997 年闽南赤潮模型研究[J]．台湾海峡，2000，19(1)：70－73.
[92] 唐云．对称性分岔理论基础[M]．北京：科学出版社，2000.
[93] 陶卿，姚穗．一种新的机器学习算法：Support Vetctor Machines[J]．模式识别与人工智能，2000，13(3)：285－290.
[94] 陶庆生．计算机代数及其应用[M]．杭州：浙江大学出版社，1991.
[95] 田畴．李群及其在微分方程中的应用[M]．北京：科学出版社，2001.
[96] 田从华，邓义祥．我国赤潮的预测与控制研究现状[J]．环境科学译从，1998，6(6)：73－77.
[97] 田盛丰，黄厚宽．基于支持向量机的数据库学习算法[J]．计算机研究与发展，2000，(1)：17－22.
[98] 万振文，袁业立．海洋赤潮生态模型参数优化研究[J]．海洋与湖沼，2000，31(2)：205－209.
[99] 王安利，王维娜．虾池赤潮与环境因子关系的研究[J]．海洋通报，1995，17(2)：128－133.

[100] 王冬云，黄焱歆．海水富营养化评价的人工神经网络方法[J]．河北建筑科技学院学报，2001，18(4)：27－29．
[101] 王洪礼．非线性动力学理论及应用[M]．天津：天津科学技术出版社，2002．
[102] 王洪礼，冯剑丰，李超，等．多种群赤潮生态模型的非线性动力学研究[J]．天津大学学报，2003，36(4)：400－403．
[103] 王洪礼，冯剑丰，沈非．渤海赤潮藻类生态动力学模型的非线性动力学研究[J]．海洋技术，2002，21(3)：8－12．
[104] 王洪礼，李超，冯剑丰，等．赤潮藻类营养盐限制方程的非线性动力学研究[J]．海洋技术，2003，22(1)：40－44．
[105] 王洪礼，王长江．渤海海域环境污染研究[J]．东北亚论坛，2003(12)：91－93．
[106] 王洪礼，张琪昌．非线性动力学理论及应用[M]．天津：天津科学技术出版社，2002．
[107] 王继生，高保成．支持向量机在交通量预测中的应用[J]．信息技术，2004，28(4)：8－10．
[108] 王景雷，吴景社．支持向量机在地下水位预报中的应用研究[J]．水利学报，2003(5)：122－128．．
[109] 王美功．赤潮灾害：研究与防治[J]．海洋信息，1998(8)：23－25．
[110] 王寿松，夏综万．大鹏湾夜光藻赤潮的营养盐动力学模型[J]．热带海洋，1997(1)：1－6．
[111] 王寿松，刘子煌．封闭环境中赤潮发生过程的数学模拟[J]．海洋与湖沼，1998，29(2)：163－168．
[112] 王旭，史道济．极值理论在金融风险价值中的应用[J]．技术经济数量经济研究，2001(8)：109－111．
[113] 王旭，张占海．赤潮的研究和预报[J]．海洋预报，2001，18(1)：65－72．
[114] 王正方，张庆．长江口溶解氧赤潮预报简易模式[J]．海洋学报，2000，22(4)：125－129．
[115] 王正方，张庆．氮、磷、维生素和微量金属对赤潮生物海洋原甲藻的增殖效应：赤潮监测与预报研究论文选编[C]．杭州：国家海洋局第二海洋研究所，2000．
[116] 韦博成．近代非线性回归分析[M]．南京：东南大学出版社，1989．
[117] 魏新，冯兴杰．基于支持向量回归的机场旅客吞吐量预测[J]．中国民航学院学报，2004，22(3)：45－47．
[118] 吴京洪，李锦蓉．人工神经网络预报浮游植物生长趋势的研究[J]．中山大学学报：自然科学版，2000，39(6)：54－58．
[119] 吴京洪，李锦蓉．大亚湾澳头增养殖区赤潮与环境的关系研究Ⅰ：浮游植物总生物量与环境因子的关系[J]．中山大学学报：自然科学版，2001，40(3)：37－40．
[120] 吴京洪，杨秀环，唐宝英，等．人工神经网络预报浮游植物生长趋势的研究[J]．中山大学学报：自然科学版，2000，39(6)：54－58．
[121] 吴玉霖、周成旭．烟台四十里湾海红色裸赤潮发展过程及成因[J]．海洋与湖沼，2001，32(2)：159－167．
[122] 席少霖，赵凤治．最优化计算方法[M]．上海：上海科学技术出版社，1983．

[123] 夏乐天，朱永志．工程随机过程[M]．南京：河海大学出版社，2000．
[124] 夏综万，于斌．大鹏湾的赤潮生态仿真模型[J]．海洋与湖沼，1997，28(5)：468－474．
[125] 肖健华，吴今培，杨叔子．基于 SVM 的综合评价方法研究[J]．计算机工程，2002，28(8)：28－30．
[126] 谢中华．运用混合回归模型预报赤潮[J]．海洋技术，2004，23(1)：27－30．
[127] 徐家声．水动力状况与赤潮生物的聚集和扩散[J]．海洋环境科学，1994，13(3)：19－22．
[128] 许卫忆，朱德弟．赤潮生消过程的数值模拟与对赤潮研究的几点认识：赤潮监测与预报研究论文选编[C]．杭州：国家海洋局第二海洋研究所，2000．
[129] 许卫忆，朱德弟．实际海域的赤潮生消过程数值模拟[J]．海洋与湖沼，2001，32(6)：598－604．
[130] 杨槐，朱华，褚亦清．一类非线性系统在随机激励下的分叉[J]．应用力学学报，1993，10(4)：69－71．
[131] 杨建强，罗先香，丁德文，等．赤潮预测的人工神经网络方法初步研究[J]．海洋科学进展，2003，21(3)：318－324．
[132] 杨建强，高振会．应用遗传神经网络方法分析赤潮监测数据[J]．黄渤海海洋，2002，20(2)：77－82．
[133] 于保华，陈瑛．渤海海洋污染与赤潮[J]．海洋信息，2000 (4)：25－26．
[134] 于贵瑞．生态系统管理学的概念框架及其生态学基础[J]．应用生态学报，2001，12(5)：787－794．
[135] 于志刚，米铁柱，谢宝东．二十年来渤海生态环境参数的演化和相互关系[J]．海洋环境科学，2000，19(1)：15－19．
[136] 曾活水，林燕顺，姚瑞梅．厦门西海域赤潮成因与细菌量相关性的研究[J]．海洋学报，1993，15(6)：105－110．
[137] 张浩然，韩正之．支持向量机[J]．计算机科学，1995，29(12)：135－138．
[138] 张季栋．日本赤潮研究和防治[J]．海洋通报，1995，14(6)：78－82．
[139] 张锦炎，冯贝叶．常微分方程几何理论与分岔问题[M]．北京：北京大学出版社，1987．
[140] 张利民，钱宏林．中国赤潮研究与防治[M]．北京：海洋出版社，2004：196－201．
[141] 张启东．黄骅沿海赤潮发生机制的初步探讨[M]．海洋科学，1993 (6)：57－60．
[142] 张启东．黄骅沿海的赤潮发生机制[J]．河北渔业，1994 (3)：5－8．
[143] 张若华，蒋庆堂．关于天津市沿海虾池赤潮综合防治技术研究的统计分析的探讨[J]．现代渔业信息，1995，10(2)：24－26．
[144] 张素英，邓子辰．非线性动力方程的增维精细积分法[J]．计算力学学报，2003，20(4)：423－426．
[145] 张学工．关于统计学习理论与支持向量机[J]．自动化学报，2000，26(1)：32－42．
[146] 张宜辉，郑天凌．赤潮的研究动向与防治对策[J]．福建环境，1999，16(2)：15－17．
[147] 张芷芬，丁同仁，黄文灶，等．微分方程定性理论[M]．北京：科学出版社，1997．
[148] 张志祥．随机扰动间断动力系统的极限性质及其应用[J]．数学的实践与认识，2002，

32(4), 651 - 657.

[149] 赵冬至, 陈江麟. 渤海、黄海赤潮发生规律研究: 赤潮灾害监测与评估研究文集[C]. 大连: 国家海洋环境监测中心, 2000.

[150] 赵冬至. 海洋环境污染与灾害卫星遥感业务化监测系统研究[J]. 遥感信息, 1999(2): 22 - 25.

[151] 赵冬至, 赵玲. 1998年渤海赤潮成因分析: 渤海赤潮灾害监测与评估研究文集[C]: 67 - 70. 大连: 国家海洋环境监测中心, 2000.

[152] 赵彦顺, 李桃楼, 赵宁. 赤潮漫谈[J]. 化学教学, 2000(1): 26 - 27.

[153] 郑红军, 周旭. 统计学习理论及支持向量机概述[J]. 现代电子技术, 2003, 147(4): 59 - 61.

[154] 郑伟谋, 郝柏林. 实用符号动力学[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1994.

[155] 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算力学与最优控制[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1993.

[156] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131 - 136.

[157] 周明江, 朱明远, 张经. 中国赤潮的发生趋势和研究进展[J]. 生命科学, 2001, 13(2): 54 - 60.

[158] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制 - Hamilton 理论体系框架[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[159] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

[160] 庄栋法. 初析赤潮成因研究的围隔实验结果及几个理化因子与硅藻赤潮的关系[J]. 海洋与湖沼, 1994, 25(2): 139 - 145.

[161] 邹景忠. 赤潮[J]. 华夏星火, 2001(10): 68 - 68.

[162] 邹淑美, 张朝贤. 赤潮的主要特征参数和化学环境[J]. 黄渤海海洋, 1992, 10(3): 73 - 77.

[163] Edwards A M. Adding detritus to a nutrient - phytoplankton - zooplankton model: a dynamical systems approach[J]. Journal of Plankton Research, 2001, 23(4) : 389 - 413.

[164] Buja, Hastie T, Tibshirani R. Linear smoothers and additive models (with discussion)[J]. Ann Statist, 1989, 17: 453 - 555.

[165] Edwards A M, Bees M A. Generic dynamics of a simple plankton population model with a non - integer exponent of closure chaos[J]. Solitons and Fractals, 2001, 12: 289 - 300 .

[166] Hombach A, Heuser C, Marquardt T. Standing stock and production rate of phytoplankton and a red tide outbreak in a heavily eutrophic embayment , Dokai Bay, Japan[J]. Marine Pollution Bulletin, 2001, 42(11): 1177 - 1186.

[167] Ariaratnam S T, Xie W C. Lyapunov exponents and stochastic stability of coupled linear systems under real noise excitation ASME[J]. Journal of Applied Mechanics, 1992, 59: 664 - 673.

[168] Arnold L, Papanicolaou G, Wihstutz V. Asymptotic analysis of the Lyapunov exponent and rotation number of the random oscillator and application[J]. SIAM Journal of Applied Mechanics, 1986, 46(3): 427 - 450.

[169] Arthur E, Mynett. Capabilities and development in modelling paradigms for marine and coastal zone processes[J]. Second International Workshop on Coastal Eutrophication (Keynote lectures), 2002(9):21 – 24.

[170] Spagnolo B, Barbera A L. Role of the noise on the transient dynamics of an ecosystem of interacting species[J]. Physica A, 2002, 315(1): 114 – 124.

[171] Dasarathy B. Nearest Neithbor(NN) norms: NN pattern classification techniques[M]. London: IEEE Press, 1991.

[172] Welch B L. On the comparison of several mean values: an alternative approach[J]. Biometrika, 1951, 38: 330 – 336.

[173] Spagnolo B, Valenti D, Fiasconaro A. Noise in ecosystems: a short review[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2004, 1(1): 185 – 211.

[174] Silverman B W. Density estimation for statistics and data analysis[M]. London: Chapman and Hall, 1986.

[175] Silverman B W. Density estimation[M]. London: Chapman and Hall, 1990.

[176] Breiman L. Arcing classifiers[J]. Annals of Statistics, 1998, 26(3): 801 – 849.

[177] Breiman L. Bagging predictors[J]. Machine Learning, 1996, 26(2): 123.

[178] Chavez C C, Song B. Dynamical models of tuberculosis and their applications[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2004, 1(2): 361 – 404.

[179] deBoor C. A practial guide to splines. Berlin: Springer – Verlag, 1978.

[180] Gu C, Bates D M, Chen Z, et al. The computation of GCV functions through Householder tridiagonalization with application to the fitting of interaction spine models[J]. SIAM J Matrix Analysis, 1990(10): 457 – 480 .

[181] Gu C, Wahba G. Minimizing GCV/GML scores with multiple smoothing parameters via the Newton method: Tech Report 847 [R]. Univ of Wisconsin: Dept of Statistics, 1988.

[182] Stone C J, Koo C Y. Additive splines in statistics[J]. Annual Meeting of Amer Statist Assoc, 1985(8): 45 – 48.

[183] Stone C J. Nonparameter regression and its application (with discussion)[J]. Ann Statistic, 1977(5): 595 – 645.

[184] Gardiner C J. Handbook of stochastic methods[M]. Berlin: Springer – Verlag, 1985.

[185] Aha D, KIbler D, Albert M. Instance – based learning algorithms[J]. Machine Learning, 1991 (6): 37 – 66.

[186] Kibler D, Aha D, Albert M. Instance – based prediction of real – valued attributes[J]. Comput Intell, 1989(5): 51 – 57.

[187] Donoho D L, Johnstone I. Projection – based approximation and a duality with kernel methods [J]. Ann Statist, 1989, 17: 58 – 106.

[188] Shepard D. A two – dimensional interpolation functions for irregularly spaced data: ACM NAT CONF, 1964[C]. Australians: ACM.

[189] Townsend D W. Neal R Pettigrew Offshore Blooms of the Red Tide Dinofla – gellate, Alexandrium sp, in the Gulf of Maine[J]. Continental Shelf Research, 2001, 21(4): 347 – 369.

[190] Huang D W, Wang H L, Qiao Y, Zhu Z Z. Stochastic Hopf bifurcation of four – wheel – steering system: proceedings of the fifth international conference on stochastic structural dynamics [C]. Hangzhou: China, 2003, 207 – 214.

[191] Drucker H, Burges C, Kaufman L, et al. Neural information processing systems[M]. Cambridge: MIT Press, 1997(9).

[192] Parzen E. On estimation of a probability density function and mode[J]. Ann Math Statistic, 1962, 33: 1065 – 1076.

[193] Feigenbaum M J. Quantitative Universality for a class of nonlinear transformations[J]. J Stat Phys, 1978, 19: 25 – 52.

[194] Freund Y, Schapire R B. A decision – theoretic generalization of online learning and an application to boosting[J]. Journal of Computer and System Sciences, 1997, 55(1): 119 – 139.

[195] Freund Y. Boosting a weak algorithm by majority information and computation[J]. 1995, 121 (2): 256 – 285 .

[196] Webb G F, Blaser M J, Zhu H, et al. Critical role of nosocomial transmission in the toronto SARS outbreak[J] I . Mathematical Biosciences and Engineering, 2004, 1(1): 1 – 13.

[197] Ridgeway G. A note on out – of – bag estimation for estimating the optimal number of boosting iterations[R/OL]. working paper: http: //www i – pensieri com/gregr/gbm shtml, 2003.

[198] Glenn M, Renshaw E, Gibson G. Stochastic modeling of environmental variation for biological populations[J]. Theoretical Population Biology, 2000, 57: 197 – 217.

[199] Hiiro K. Development of continuous monitoring systems for environmental parameters related to red tides[J]. Red tide: Biology, Environmental Science and Toxicology, 1987, 165 – 168.

[200] Hodgkiss I J. Are changes in N:P ratios in coastal waters the key to increase red tide bloom[J]. Hydrobiologia, 1997, 352(5): 141 – 147.

[201] Hsu C W, Lin C J. A simple decomposition method for support vector machine[J]. Machine Learning, 2002, 46(1): 241 – 314.

[202] Wilson H, Recknagel F. Towards a genetic artificial neural network model for dynamic prediction of algal abundance in freshwater lakes[J]. Ecological Modelling, 2001, 146: 69 – 84.

[203] Fredman J H. Multivariate adaptive regression splines(with discussion)[J]. The annals of statistics, 1991, 19: 1 – 141 .

[204] Freidman J H. Greedy function approximation: a gradient boosting machine[J]. Annals of Statistics, 2001, 29: 1189 – 1232.

[205] Friedman J H, Silverman B W. Flexible parsimonious smoothing and additive modeling[J]. Technometrics, 1989, 31: 3 – 39.

[206] Friedman J H, Stuetzle W. Projection pursuit regression[J]. J Amer Statist Assoc, 1981, 76: 817 – 823.

[207] Quinlan J R. C4 5: Programs for machine learning[M]. San Mateo, Calif: Morgan Kaufmann, 1993.

[208] Tukey J W. Exploratory data analysis[M]. London: Addison – Wesley, 1977.

[209] Jason B, Recknagel F. Inducing explanatory rules for the prediction of algal blooms by genetic

algorithms[J]. Environment International, 2001, 27: 237 – 242.

[210] Jason B, Recknagel F. Knowledge discovery for prediction and explanation of blue – green algal dynamics in lakes by evolutionary algorithms[J]. Ecological Modelling, 2001, 146: 253 – 262.

[211] Simonoff J S. Smoothing methods in statistics[M]. Berlin: Springer, 1996.

[212] John J W, Kenneth D H. A numerical analysis of landfell of the 1979 red tide of karenia brevis along the west coast of florida[J]. Continental Shelf Research, 2002, 22(1): 15 – 38.

[213] Aparicio J P, Solari H G. sustained oscillations in stochastic systems[J]. Mathematical Biosciences, 2001, 169: 15 – 25.

[214] Khasmiskii R Z. Stochastic stability of differential equations[M]. Netherlands: Sijthoff and Noordhoff, 1980.

[215] Kudela R M, Cochlan W P. Nitrogen and carbon uptake kinetics and the influence of irradiance for a red tide bloom off Southern California[J]. Aquatic Microbial Ecology, 2000, 21(1): 31 – 47.

[216] Shumaker L L. On spaces of piecewise polynomials of two variables Approximation[J]. Theory and Spline Functions, 1984, 151 – 179.

[217] Breiman L, Fredman J H, Olshen R A, Stone C J. Classification and regression trees[M]. New York: Chapman and Hall, 1984.

[218] Lin L. Stability and Hopf bifurcation of a differential delay system[J]. Journal of Biomathematics, 2002, 17(2): 157 – 164.

[219] Stitson M O, Weston J A, Gammerman A, et al. Theory of support vector machines: technical report CSD – TR – 96 – 17 Computational Intelligence Group[R]. Royal Holloway: University of London, 1996.

[220] Bonzzini M, Lenarduzzi L. Locally smoothing for scattered noisy data[J]. International Series of Nuemerical Mathematics, 1985, 75: 51 – 60.

[221] Müller K R, Smola A J, Ratsch G, et al. Predicting time series with support vector machines: In Proc of ICANN'97, 1997[C]. Berlin: Springer Lecture Notes in Computer Science.

[222] Namachchiwaya N S. Stochastic bifurcation[J]. Applied Mathematics and Computation, 1990, 38: 101 – 159.

[223] Namachiwaya N S, Roessel V, Talwar S. Maximal Lyapunov exponent and almost – sure stability for coupled two degree of freedom stochastic systems[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1994, 61: 446 – 452.

[224] Oseledec V L. A multiplicative ergodic theorem Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems[J]. Transaction of the Moscow Mathematical Society, 1968, 19: 197 – 231.

[225] Diaconis P, Shahshahani M. On non – linear functions of linear combinations[J]. SIAM J Sci Stat Comput, 1984(5): 175 – 191.

[226] Glibert P, Pitcher G. Global ecology and oceanography of harmful algal blooms[M]. Baltimore and Paris: SCOR and IOC,2001 .

[227] Park, Byeong U, Marron J S. Comparison of data – driven bandwidth selectors[J]. Journal of the American Statistical Association, 1990, 85: 66 – 72.

[228] Platt J C. Fast training of support vector machines using sequential minimal optimization Advances in Kernel Methods: Support Vector Learning[M]. Cambridge: MIT Press, 1999.

[229] Yu Q, Hongli W, Feng Z, et al. Stochastic Pitchfork bifurcation of Vehicle steering system : APVC2001[C]. Hangzhou: China.

[230] Chen Q W, Arthur E. Mynett integration of data mining techniques and heuristic knowledge in fuzzy logic modeling of algal biomass in the north sea: second international workshop on coastal eutrophication, (proceedings), November ,2002[C]. Chongqin: China.

[231] Quinlan J R. Bagging boosting and C4.5: Proc the 13" National Conference on Artificial Intelligence, 1993[C]. Portland: OR 996.

[232] Upadhyay R K, Rai B, Iyengar S R. How do ecosystems respond to external perturbations[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2000(11): 1963 - 1982.

[233] López R D, Prunaret F. Complex behavior in a discrete coupled logistic model for the symbiotic interaction of two species[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2004, 1(2): 307 - 324.

[234] Recknagel F, Wilson H. Elucidation and prediction of aquatic ecosystems by artificial neural networks[M]. Berlin: Springer, 2000.

[235] Shevade S K, Keerthi S, Bhattaeharyy C, et al. Improvements to SMO algorithm for SVM regression[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2000, 11(5): 1189 - 1193.

[236] Coles S G,, Tawn J A. Statistical methods for extreme values: a course presented at the RSS conference, 1998[C]. Strathclyde: RSS.

[237] Sheather S J, Jones M C. A reliable data - based bandwidth selection method for kernel density estimation[J]. Journal of the Royal Statistical Society(B), 1991, 53: 683 - 690.

[238] Schlkopf B, Smola A. A tutorial on support vector regression[R]. Neuro COL T2: Technical Report Series NC2 - TR - 1998 - 030, 1994.

[239] Gunn S. Support vector machines for classification and regression[R]. University fo Notre Dame: ISIS Technical Report, 1998.

[240] Stockwell D R. Machine learning methods for ecological modeling chapter Genetic Algorithms: species distribution modeling[M]. Berlin: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[241] Coles S. An introduction to statistical modeling of extrem values[M]. Berlin: Springer, 2001.

[242] Mitra S, Sankar K P, Mitra P. Data mining in soft computing framework: A survey[J]. IEEE Transactions On Knowledge And Data Engineering, 1997, 3(1): 3 - 14.

[243] Hastie T, Tibshirani R, Friedman J H. The elements of statistical learning[M]. Berlin: Springer - Verlag, 2001.

[244] Hastie T, Tibshirani R. Genaralized additive models[M]. London: Chapman and Hall, 1990.

[245] Hastie T, Tibshirani R. Generalized additive models (with discussion)[J]. Statist Science 1986 (1): 297 - 318.

[246] Cherkassky V, Mulier F. Guest editoral Vapnik - Chervonenkis(VC) Learning theory and its application[J]. Transaction on Neural Networks, 1999,(10): 781 - 795.

[247] Vapnik V. The nature of statistical learning theory[M]. NY: Springer - Verlag, 1995.

[248] Vapnik V, Golowich S, Smola A Support vector method for function approximation, regression estimation, and signal processing: Neural Information Processing Systems[C]. Cambridge: MIT Press, 1997.

[249] Cleveland W S, Devlin S J. Locally weighted regression: an approach to regression analysis by local fitting[J]. Amer Statistic Assoc, 1983,83: 596 – 610.

[250] Cleveland W S. Robust locally weighted regression and smoothing scatter plots[J]. Amer Statistic Assoc, 1979,74: 828 – 836.

[251] Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos[M]. NewYork: Vol 2 Springer – Verlag, 1990.

[252] Kuang Y, Huisman J, Elser J J. Stochometric plant – herbivore models and their interpretation [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2004, 1(2): 215 – 222.

[253] Roelke D, Buyukates Y. The diversity of harmful algal bloom – triggering mechanisms and the complexity of bloom initiation[J]. Human and Ecological Risk Assessment, 2001, 7(5): 1347 – 1362.

[254] Smayda T J. Harmful algal blooms: Their ecophysiology and general relevance to phytoplankton blooms in the sea[J]. Limnology and Oceanography, 1997, 42(5): 1137 – 1153.

[255] Paerl H W. Nuisance phytoplankton blooms in coastal estuarine and inland waters[J]. Limnology and Oceanography, 1988, 33(4): 823 – 847.

[256] Sellner K G. Physiology ecology and toxic properties of marine cyanobacteria blooms[J]. Limnology and Oceanography, 1997, 42(5): 1089 – 1104.

[257] Bricelj V M, Lonsdale D J. Aureococcus anophagefferens: causes and ecological consequences of brown tides in US mid – Atlantic coastal waters[J]. Limnology and Oceanography, 1997, 42 (5): 1023 – 1038.

[258] Huisman J, Weissing F J. Biological conditions for oscillations and chaos generated by multispecies competition[J]. Ecology, 2001, 82(10): 2682 – 2695.

[259] Huisman J, Weissing F J. Fundamental unpredictability in multispecies competition[J]. American Naturalist, 2001, 157(5): 488 – 494.

[260] Tester A, Steidinger K A. Gymnodinium breve red tide blooms: initiation transport and consequences of surface circulation[J]. Limnology and Oceanography, 1997, 42(5): 1039 – 1051.

[261] Anderson D M. Bloom dynamics of toxic Alexandrium species in the northeastern US[J]. Limnology and Oceanography, 1997, 42(5): 1009 – 1022.

[262] Lek S, Guegan J F. Artificial neural networks as a tool in ecological modeling: an introduction [J]. Ecological Modelling, 1999, 120(23): 65 – 73.

[263] Recknagel F. ANNA – Artificial Neural Network model for predicting species abundance and succession of blue – green algae[J]. Hydrobiologia, 1997, 49(3): 47 – 57.

[264] Gurbuz H. Predicting dominant phytoplankton quantities in a reservoir by using neural networks [J]. Hydrobiologia, 2003, 504(13): 133 – 141.

[265] Olden J D. An artificial neural network approach for studying phytoplankton succession[J]. Hydrobiologia, 2000, 436(13): 131 – 143.

[266] Xu M. Application of Bayesian regularized BP neural network model for analysis of aquatic ecological data – A case study of chlorophyll – a prediction in Nanzui water area of Dongting Lake [J]. Journal of Environmental Sciences – China, 2005, 17(6): 946 – 952.

[267] Cerna L, Chytry M. Supervised classification of plant communities with artificial neural networks [J]. Journal of Vegetation Science, 2005, 16(4): 407 – 414.

[268] Lee J H. Neural network modelling of coastal algal blooms[J]. Ecological Modelling 2003, 159 (2 – 3): 179 – 201.

[269] Marce R. A neuro – fuzzy modeling tool to estimate fluvial nutrient loads in watersheds under time – varying human impact[J]. Limnology and Oceanography – Methods, 2004, (2): 342 – 355.

[270] Czogala J L. Fuzzy and neuro – fuzzy intelligent systems[M]. New York: Physica – Verlag, 2000.

[271] Altrock C. Fuzzy logic and neuro fuzzy applications explained[M]. Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall, 1995.

[272] Foody G M. Approaches for the production and evaluation of fuzzy land cover classifications from remotely – sensed data[J]. International Journal of Remote Sensing 1996, 17(7): 1317 – 1340.

[273] Recknagel F. Artificial neural network approach for modelling and prediction of algal blooms [J]. Ecological Modelling, 1997, 96(1 – 3): 11 – 28.

[274] Marsili – Libelli S. Fuzzy prediction of the algal blooms in the Orbetello lagoon[J]. Environmental Modelling and Software, 2004, 19(9): 799 – 808.

[275] Soyupak S, Chen D G. Fuzzy logic model to estimate seasonal pseudo steady state chlorophyll – a concentrations in reservoirs[J]. Environmental Modeling and Assessment, 2004, 9(1): 51 – 59.